

Примеры полей и коммутативных колец

- A2◊1. В поле \mathbb{C} явно вычислите $\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z, |z|, \operatorname{Arg} z$, если
- а) $z = (5 + i)(7 - 6i)/(3 + i)$
 б) $z = (1 + i)^5/(1 - i)^3$ в) $\left((\sqrt{3} + i)/(1 - i) \right)^{30}$ г) $z^2 = a + ib$, где $a, b \in \mathbb{R}$ даны.
- A2◊2. Выразите $\sin 5\varphi$ через $\sin \varphi$ и получите для $\sin(4\pi/5)$ и $\cos(2\pi/5)$ явные выражения в радикалах от рациональных чисел.
- A2◊3. В поле \mathbb{C} вычислите
- а) $z^m + z^{-m}$, если $z + z^{-1} = 2 \cos \vartheta$, где $\vartheta \in \mathbb{R}$ дано
 б) сумму в) произведение s -тых степеней всех корней степени n из 1 (для всех $n, s \in \mathbb{N}$).
- A2◊4. Вычислите суммы: а) $\binom{n}{0} + \binom{n}{4} + \binom{n}{8} + \dots$ б) $\binom{n}{1} + \binom{n}{5} + \binom{n}{9} + \dots$ в) $\sin x + \sin 2x + \dots + \sin nx$.
- A2◊5 (Гауссовы целые числа). Найдите все обратимые элементы Гауссовых колец
- а) $\mathbb{Z}[i] \stackrel{\text{def}}{=} \{ a + bi \in \mathbb{C} \mid a, b \in \mathbb{Z}, i^2 = -1 \}$ б) $\mathbb{Z}[\omega] \stackrel{\text{def}}{=} \{ a + b\omega \in \mathbb{C} \mid a, b \in \mathbb{Z}, \omega^2 + \omega + 1 = 0 \}$.
- A2◊6 (кольца вычетов). Составьте таблицы умножения для колец $\mathbb{Z}/(m)$ с $4 \leq m \leq 8$. В каждом из них найдите все обратимые элементы, все квадраты, все делители нуля и все нильпотенты. Для обратимых элементов постройте таблицу обратных.
- A2◊7. Пусть $f : A \rightarrow B$ — ненулевой гомоморфизм коммутативных колец с единицами. Верно ли, что $f(1) = 1$? А если в B нет делителей нуля?
- A2◊8 (взаимная простота). Пусть $ax + by = 1$ в некотором коммутативном кольце A . Справедливы ли для произвольного $m \in A$ импликации: а) $a|mb \Rightarrow a|m$ б) $a|m \ \& \ b|m \Rightarrow ab|m$.
- A2◊9. Является ли кольцо $\mathbb{R}[x]/(f)$ полем для а) $f = x^4 + 1$ б) $f = x^3 + 1$ в) $f = x^2 + 3$?
- A2◊10 (функция Эйлера). Обозначим через $\varphi(n)$ число обратимых элементов кольца $\mathbb{Z}/(n)$. Покажите, что
- а) $k \pmod n$ обратим в $\mathbb{Z}/(n) \iff \operatorname{нод}(n, k) = 1$ в \mathbb{Z}
 б) φ является мультипликативным характером¹
 в) $\varphi(m) = m \cdot (1 - p_1^{-1}) \cdots (1 - p_n^{-1})$ для $m = p_1^{k_1} \cdots p_n^{k_n}$, где все p_i просты и различны.
- A2◊11. Найдите все $m \in \mathbb{N}$ с $\varphi(m) = 10$.
- A2◊12 (теорема Эйлера). Вычислите $a^{\varphi(n)}$ для произвольного обратимого $a \in \mathbb{Z}/(n)$.
- A2◊13 (поле \mathbb{F}_p). Пусть $\mathbb{F}_p \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{Z}/(p)$, где $p \in \mathbb{N}$ — простое.
- а) Покажите, что \mathbb{F}_p — поле.
 б) Решите в \mathbb{F}_p уравнение $x^2 = 1$, вычислите произведение всех ненулевых элементов \mathbb{F}_p и докажите теорему Вильсона: натуральное $m \geq 2$ просто $\iff m \mid ((m - 1)! + 1)$.
 в) Какие значения принимают многочлены $x^p - x, x^{p-1}$ и $x^{\frac{p-1}{2}}$ на \mathbb{F}_p и на квадратах из \mathbb{F}_p ?
 г) Сколько в \mathbb{F}_p ненулевых квадратов? Всегда ли в \mathbb{F}_p разрешимо уравнение $x^2 + y^2 = -1$?
 д) Выпишем \mathbb{F}_p в виде: $-(p - 1)/2, \dots, -1, 0, 1, \dots, (p - 1)/2$. Докажите лемму Гаусса: $a \in \mathbb{F}_p$ тогда и только тогда является квадратом, когда число «положительных» чисел этой записи, становящихся «отрицательными» при умножении на a , чётно.
- A2◊14. При каких p в \mathbb{F}_p разрешимы уравнения² а) $x^2 = -1$ б) $x^2 = 2$
- A2◊15*. Есть ли среди фактор колец кольца $\mathbb{Z}[i]$ поле характеристики а) 2 б) 3, и если да, то сколько в нём может быть элементов?
- A2◊16*. При каком простом p существует ненулевой гомоморфизм $\mathbb{Z}[i] \rightarrow \mathbb{Z}/(p)$?
- A2◊17*. Разложите 5 на неприводимые³ множители в кольце $\mathbb{Z}[i]$. Какие неприводимые $p \in \mathbb{Z}$ остаются таковыми и в $\mathbb{Z}[i]$?

¹функция $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ называется мультипликативным характером, если $f(mn) = f(m)f(n) \forall m, n$ с $\operatorname{нод}(m, n) = 1$

²

ондъ $g/(1 - z^d)$ влож — (g) в (\neq) рош $1 \equiv d$ и $z = d - (v)$ в (\neq) вло

³элемент коммутативного кольца с единицей называется *приводимым*, если он является произведением двух необратимых элементов

№	дата сдачи	имя и фамилия принявшего	подпись принявшего
1а			
б			
в			
г			
2			
3а			
б			
в			
4а			
б			
в			
5а			
б			
6			
7			
8а			
б			
9			
10а			
б			
в			
11			
12			
13а			
б			
в			
г			
д			
14а			
б			
15а			
б			
16			
17			