§15. Пространства со скалярным произведением

Всюду в этом параграфе мы по умолчанию предполагаем, что характеристика основного поля $\Bbbk$ отлична от 2.

15.1. Алгебра SV^*: неформальное описание. Зафиксируем в векторном пространстве V над полем $\Bbbk$ некоторый базис $e_1, e_2, \dots, e_n$ и будем обозначать через

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad x^t = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

столбцы и строки координат векторов $v \in V$ в этом базисе. Каждый многочлен от координат $f \in \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]$ задаёт на пространстве V функцию, значение которой на векторе $a = \sum \alpha_i e_i$ равно результату подстановки $x_i = \alpha_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$, в многочлен f :

$$f : V \to \Bbbk, \quad a = \sum \alpha_i e_i \mapsto f(a) = f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n). \tag{15-1}$$

Упражнение 15.1. Покажите, что сопоставление многочлену f функции $a \mapsto f(a)$ является гомоморфизмом алгебры многочленов $\Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]$ в алгебру функций $V \to \Bbbk$, что его образ не зависит от выбора базиса и что этот гомоморфизм инъективен[1] тогда и только тогда, когда поле $\Bbbk$ бесконечно.

У этой конструкции есть очевидное неудобство: она зависит от выбора координат в V. Избавиться от этого неудобства можно записывая многочлены в виде линейных комбинаций произведений ковекторов $\xi \in V^*$ и не выражая последние через какой-либо конкретный базис. Так, пространство всех однородных многочленов степени d вместе с нулевым многочленом может быть описано как линейная оболочка всевозможных произведений $\xi_1 \xi_2 \dots \xi_d$ наборов произвольных ковекторов $\xi_\nu \in V^*$. Раскладывая эти ковекторы по базису $x_1, x_2, \dots, x_n \in V^*$ в виде $\xi_i = \sum a_{ij} x_j$, мы можем записать каждое такое произведение в виде многочлена от x_i. Однако разные линейные комбинации произведений ковекторов могут при этом записываться одинаковыми многочленами: например, в силу дистрибутивности произведения многочленов мы заведомо имеем для любых $\xi, \eta, \varphi, \psi \in V^*$ и $a, b, c, d \in \Bbbk$ равенства вида $(a\,\xi + b\,\eta)(\,\varphi + d\,\psi) = ab\,\xi\varphi + ad\,\xi\psi + bc\,\eta\varphi + bd\,\eta\psi$.

Таким образом, мы имеем две возможности для записи однородных многочленов степени d на пространстве V — однозначную, но привязанную к выбору конкретного базиса $x_1, x_2, \dots, x_n \in V^*$ запись в виде линейной комбинации мономов $x_1^{m_1} x_2^{m_2} \cdots x_n^{m_n}$ с $\sum m_i = d$, и неоднозначную запись в виде линейной комбинации произведений произвольных ковекторов $\xi_1 \xi_2 \dots \xi_d$, которая не зависит от выбора базиса. В терминах второй записи интерпретация многочленов как функций на V тоже не зависит от выбора базиса: каждому произведению $\xi_1 \xi_2 \dots \xi_d$ сопоставляется функция

$$\xi_1 \xi_2 \dots \xi_d : v \mapsto \prod_{\alpha=1}^{d} \langle\, \xi_\alpha \,, v \,\rangle \tag{15-2}$$

---

[1] т. е. разным многочленам отвечают разные функции на V

и это сопоставление по линейности продолжается на линейные комбинации произведений ковекторов. Отметим, что корректность этого правила, т. е. независимость значения $f(v)$ от способа представления f в виде линейной комбинации произведений ковекторов, вытекает из того, что оно является лишь иной записью заведомо корректного правила (15-1). С другой стороны, сопоставление многочлену функции по формуле (15-2) делает второе утверждение из упр. 15.1 и многие другие подобные утверждения самоочевидными, а также упрощает некоторые формулы.

Чтобы подчеркнуть независимость алгебры многочленов на V от выбора координат, мы всюду далее будем обозначать пространство однородных многочленов степени d на пространстве V через S^dV^*, а всю алгебру многочленов на V — через

$$SV^* = \bigoplus_{d\geqslant 0} S^dV^*\,, \quad \text{где} \quad S^0V^* \overset{\text{def}}{=} \Bbbk \quad \text{и} \quad S^1V^* \overset{\text{def}}{=} V^*\,,$$

и называть эту алгебру *симметрической алгеброй*[1] пространства V^*. Фиксация в V^* базиса $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ задаёт изоморфизм $\varphi_x : SV^* \xrightarrow{\sim} \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]$. При выборе другого базиса $y = x \cdot C$ композиция изоморфизмов

$$\varphi_x \circ \varphi_y^{-1} : \Bbbk[y_1, y_2, \dots, y_n] \xrightarrow{\sim} SV^* \xrightarrow{\sim} \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]$$

переводит многочлен $f(y) \in \Bbbk[y_1, y_2, \dots, y_n]$ в многочлен $f(xC) \in \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]$, т. е. представляет собою линейную замену координат в многочленах.

Ещё раз подчеркнём, что алгебра многочленов SV^* всегда бесконечна и бесконечномерна, даже если векторное пространство V является конечным множеством (когда основное поле $\Bbbk$ конечно). Но над бесконечным полем по упр. 15.1 различным элементам алгебры SV^* отвечают различные функции на V.

Упражнение 15.2. Покажите, что над полем характеристики нуль пространство S^dV^* линейно порождается чистыми d-тыми степенями ξ^d всевозможных линейных форм $\xi \in V^*$, и явно выразите многочлен $x_1^2x_2 + x_2^2x_3$ в виде линейной комбинации кубов линейных форм от x_1, x_2, x_3.

15.2. Симметричные билинейные и квадратичные формы. Однородные многочлены $q \in S^2V^*$ называются *квадратичными формами* на пространстве V. Если $\operatorname{char}(\Bbbk) \neq 2$, то в координатах квадратичную форму q удобно записывать в виде

$$q(x) = \sum_{i,j} x_i q_{ij} x_j = x^t \cdot Q \cdot x\,, \tag{15-3}$$

где суммирование происходит по всем парам индексов $1 \leqslant i, j \leqslant n$ и коэффициенты q_{ij} организованы в симметричную матрицу $Q = \left(q_{ij}\right)$ размера $n \times n$ так, что при $i \neq j$ величина $q_{ji} = q_{ij}$ равна *половине*[2] фактического коэффициента при x_ix_j, получающегося после приведения подобных слагаемых. Из такой записи видно, что квадратичная форма $q : V \to \Bbbk$, задаваемая многочленом (15-3), имеет вид $q(v) = \tilde{q}(v, v)$, где $\tilde{q} : V \times V \to \Bbbk$,

[1] формальное определение симметрической алгебры, не апеллирующее к координатам и пригодное для бесконечномерных пространств, мы дадим позже, когда будем заниматься тензорными произведениями

[2] над полем характеристики 2 многочлен x_1x_2 в таком виде не записывается

$\tilde{q}(x,y) = x^t \cdot Q \cdot y$, — *симметричная билинейная* форма с матрицей Грама Q. Эта форма называется *поляризацией* многочлена q. Если $\operatorname{char}\Bbbk \neq 2$, поляризация $\tilde{q}$ однозначно определяется квадратичным многочленом q по формулам

$$\tilde{q}(v,w) = \big(q(v+w) - q(v) - q(w)\big)/2 = \big(q(v+w) - q(v-w)\big)/4\,. \tag{15-4}$$

Упражнение 15.3. Проверьте это и покажите, что $\tilde{q}(x,y) = \frac{1}{2}\sum\limits_i y_i \frac{\partial q(x)}{\partial x_i}$.

Мы будем называть матрицу Q из представления (15-3) *матрицей Грама* квадратичного многочлена q. Поскольку ранг матрицы не меняется при её умножении на обратимую матрицу, а при замене базиса матрица Грама меняется по правилу $Q \mapsto C^t QC$ с обратимой матрицей C, ранг матрицы Грама не зависит от выбора базиса. Он называется *рангом квадратичной формы* q.

Теорема 15.1 (теорема Лагранжа)
Над любым полем $\Bbbk$ с $\operatorname{char}\Bbbk \neq 2$ для любой симметричной билинейной формы $\tilde{q}$ на пространстве V в V существует базис с диагональной матрица Грама.

Доказательство. Если $\dim V = 1$ или $\tilde{q}$ тождественно равна 0, то матрица Грама уже диагональна. Если $\tilde{q} \not\equiv 0$, то отвечающий форме $\tilde{q}$ квадратичный многочлен $q(v) = \tilde{q}(v,v)$ согласно (15-4) тоже не является тождественным нулём, и найдётся вектор $e \in V$, такой что $\tilde{q}(e,e) \neq 0$. Возьмем его в качестве первого вектора искомого базиса. Поскольку ограничение формы $\tilde{q}$ на одномерное пространство $\Bbbk \cdot e$ невырождено, V по предл. 14.5 распадается в прямую ортогональную сумму $(\Bbbk \cdot e) \oplus e^{\perp}$, где $e^{\perp} = \{\, v \in V \mid \tilde{q}(e,v) = 0 \,\}$. По индукции, в $e^{\perp}$ существует базис с диагональной матрицей Грама. Добавляя к нему e, получаем нужный базис в V. □

Следствие 15.1
Всякая квадратичная форма над любым полем $\Bbbk$ с $\operatorname{char}\Bbbk \neq 2$ линейной обратимой заменой переменных приводится к виду $\sum a_i x_i^2$.

Следствие 15.2
Над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$ характеристики $\operatorname{char}(\Bbbk) \neq 2$ две квадратичные формы тогда и только тогда переводятся одна в другую линейной обратимой заменой координат, когда их матрицы Грама имеют одинаковый ранг.

Доказательство. Над алгебраически замкнутым полем ненулевые диагональные элементы матрицы Грама преобразуются в единицы заменой базисных векторов по формуле $e_i \mapsto e_i/\sqrt{q(e_i)}$. Количества единиц и нулей на главной диагонали такой матрицы равны рангу формы и размерности её ядра и не зависят от выбора базиса. Поэтому любые две формы одинакового ранга обратимой линейной заменой координат приводятся к одинаковому виду $\sum x_i^2$. □

15.2.1. Определитель Грама. Над алгебраически незамкнутым полем отнормировать ортогональный базис до ортонормального, вообще говоря, невозможно. Простейшим инвариантом, доставляющим препятствие к этому, является определитель $\det Q_e$ матрицы Грама Q формы q в произвольном базисе e. При переходе к другому базису определитель Грама умножается на квадрат определителя матрицы перехода. Поэтому с точностью до умножения на ненулевой квадрат из поля $\Bbbk$ определитель Грама не зависит от выбора базиса. В частности, форма, определитель Грама которой не является квадратом, не имеет ортонормального базиса. Мы будем обозначать класс определителя Грама по модулю умножения на ненулевые квадраты через $\det q \in \Bbbk / \Bbbk^{*2}$ и писать $a \sim b$, если $a = \lambda^2 b$ для ненулевого $\lambda \in \Bbbk$. Квадратичная форма q называется *вырожденной*, если $\det q = 0$. Формы с $\det q \neq 0$ называются *невырожденными*.

Пример 15.1 (квадратичные формы от двух переменных)
По теореме Лагранжа ненулевая квадратичная форма от двух переменных

$$q(x) = a\,x_1^2 + 2\,b\,x_1x_2 + c\,x_2^2 = (x_1, x_2)\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

подходящей линейной заменой координат приводятся либо к виду αt^2 с $\alpha \neq 0$, либо к виду $\alpha t_1^2 + \beta\,t_2^2$, где $\alpha \neq 0$ и $\beta \neq 0$. В первом случае $ac - b^2 \sim \det q \sim \alpha \cdot 0 = 0$, форма q вырождена и пропорциональна полному квадрату линейной формы $t = t(x_1, x_2)$. Такая форма зануляется вдоль одномерного подпространства $\mathrm{Ann}(t) \subset V$ и отлична от нуля на всех остальных векторах. Во втором случае $ac - b^2 \sim \det q \sim \alpha\beta \neq 0$ и форма q невырождена. Если существует ненулевой вектор $v = (\vartheta_1, \vartheta_2)$, такой что $q(v) = \alpha\vartheta_1^2 + \beta\vartheta_2^2 = 0$, то $-\det q \sim -\alpha\beta \sim -\beta/\alpha = (\vartheta_1/\vartheta_2)^2$ является полным квадратом[1], и тогда

$$\alpha t_1^2 + \beta\,t_2^2 = \alpha\left(t_1 + \frac{\vartheta_1}{\vartheta_2}t_2\right)\left(t_1 - \frac{\vartheta_1}{\vartheta_2}t_2\right)$$

является произведением двух непропорциональных линейных форм. Такая форма тождественно зануляются на двух одномерных подпространствах и отлична от нуля на всех прочих векторах. Она называется *гиперболической*. Если же $-\det q$ не квадрат, то $q(v) \neq 0$ при $v \neq 0$. Такая форма называется *анизотропной*.

15.2.2. Изотропные и анизотропные подпространства. Подпространство $U \subset V$ называется *анизотропным* для квадратичной формы q, если $q(v) = \tilde{q}(v, v) \neq 0$ для любого ненулевого $v \in V$. Например, вещественное евклидово пространство является анизотропным по отношению к евклидовому скалярному произведению. В прим. 15.1 мы видели, что двумерное подпространство U анизотропно, если и только если $-\det\left(q|_U\right)$ не квадрат в $\Bbbk$. Над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$ анизотропных форм от $\geqslant 2$ переменных не бывает.

Подпространство $U \subset V$ называется *изотропным* для квадратичной формы q, если ограничение $q|_U \equiv 0$ или, что то же самое, $\tilde{q}(u_1, u_2) = 0\ \forall\ u_1, u_2 \in U$. Ненулевые векторы v, порождающие одномерные изотропные подпространства, называются *изотропными векторами*. Для таких векторов $q(v) = \tilde{q}(v, v) = 0$.

Согласно прим. 15.1, ненулевая квадратичная форма от двух переменных вырождена тогда и только тогда, когда у неё имеется ровно одно одномерное изотропное подпространство, а невырожденная квадратичная форма от двух переменных либо анизотропна, либо имеет ровно два различных одномерных изотропных подпространства.

Предложение 15.1
Размерность изотропного подпространства U в пространстве V с невырожденной симметричной билинейной формой β не превышает $\dim V/2$.

[1]отметим, что $\vartheta_2 \neq 0$ в силу равенства $\alpha\vartheta_1^2 + \beta\vartheta_2^2 = 0$

Доказательство. Поскольку форма β невырождена, оператор корреляции

$$\beta : V \to V^* , \quad v \mapsto \beta(\,*\,, v)\,,$$

является изоморфизмом. Изотропность $U \subset V$ означает, что $\beta(U) \subset \operatorname{Ann}(U)$. Поэтому $\dim U = \dim \beta(U) \leqslant \dim \operatorname{Ann} U = \dim V - \dim U$, откуда $2 \dim U \leqslant \dim V$. □

15.2.3. **$2n$-мерное гиперболическое пространство H_{2n}** определяется как прямая сумма $V^* \oplus V$, где $\dim V = n$, наделённая симметричной билинейной формой

$$h\left(\xi_1 + v_1, \xi_2 + v_2\right) \stackrel{\text{def}}{=} \left\langle\, \xi_1 \,,\, v_2 \,\right\rangle + \left\langle\, \xi_2 \,,\, v_1 \,\right\rangle\,,$$

которая ограничивается в тождественно нулевые формы на подпространства V и V^*, а на любой паре паре вектор-ковектор равна свёртке $h(\xi, v) = h(v, \xi) = \langle\, \xi \,,\, v \,\rangle$. Базис H_{2n}, составленный из векторов $e_1, e_2, \dots , e_n, e_1^*, e_2^*, \dots , e_n^*$ каких-нибудь двойственных базисов V и V^*, называется *гиперболическим базисом*. Матрица Грама такого базиса имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & E \\ E & 0 \end{pmatrix}\,,$$

где 0 и E — нулевая и единичная $n \times n$-матрицы. Тем самым, форма h невырождена и обладает изотропными подпространствами половинной размерности, так что оценка из предл. 15.1 является точной. Прямая ортогональная сумма $H_{2m} \oplus H_{2k}$ изометрически изоморфна $H_{2(m+k)}$. Векторы $p_i = e_i + e_i^*$ и $q_i = e_i - e_i^*$ образуют ортогональный базис формы h со скалярными квадратами $h(p_i, p_i) = 2$, $h(q_i, q_i) = -2$.

Лемма 15.1
Всякое m-мерное изотропное подпространство U в пространстве V с невырожденной симметричной формой β содержится в некотором $2m$-мерном гиперболическом подпространстве $W \subset V$, и любой базис в U дополняется до гиперболического базиса в W.

Доказательство. Выберем в U базис $u_1, u_2, \dots , u_m$, дополним его до базиса в V и рассмотрим двойственный базис относительно невырожденной формы β. Первые m векторов $u_1^\times, u_2^\times, \dots , u_m^\times$ этого двойственного базиса таковы, что

$$\beta\left(u_i, u_j^\times\right) = \begin{cases} 1 & \text{при } i = j \\ 0 & \text{при } i \neq j\,, \end{cases} \tag{15-5}$$

причём добавление к любому из векторов $u_j^\times$ любой линейной комбинации векторов u_i не нарушает этого свойства. Заменяя каждый $u_j^\times$ на

$$w_j = u_j^\times - \frac{1}{2} \sum_\nu \beta\left(u_j^\times, u_\nu^\times\right) u_\nu\,,$$

получим набор векторов $w_1, w_2, \dots , w_m$, также удовлетворяющий (15-5) и порождающий изотропное подпространство, поскольку $\beta(w_i, w_j) = \beta(u_i^\times, u_j^\times) - \frac{1}{2}\,\beta(u_i^\times, u_j^\times) - \frac{1}{2}\,\beta(u_j^\times, u_i^\times) = 0$ для всех $1 \leqslant i, j \leqslant n$. □

Теорема 15.2
Любое пространство V с невырожденной симметричной билинейной формой раскладывается в прямую ортогональную сумму гиперболического и анизотропного подпространства.

Доказательство. Индукция по $\dim V$. Если $\dim V = 1$ или в V нет изотропных векторов, то само V является анизотропным пространством. Если в V есть ненулевой изотропный вектор e, то по лем. 15.1 он содержится в некоторой гиперболической плоскости H_2. Поскольку ограничение формы на эту плоскость невырождено, пространство V раскладывается в ортогональную прямую сумму $V = H_2 \oplus H_2^{\perp}$. По индукции, $H_2^{\perp} = H_{2k} \oplus U$, где U анизотропно и ортогонально H_{2k}. Тогда $V = H_{2k+2} \oplus U$. □

Следствие 15.3
Любая квадратичная форма q от n переменных линейной обратимой координат приводится к виду $x_1x_{i+1} + x_2x_{i+2} + \cdots + x_ix_{2i} + \alpha(x_{2i+1}, x_{2i+1} \ldots, x_r)$, где $r = \operatorname{rk}(q)$ и $\alpha(x) \neq 0$ при $x \neq 0$. □

15.3. Изометрии невырожденной симметричной формы. Напомним[1], что линейный оператор $f : V \to V$ называется *изометрией* невырожденной формы β, если

$$\forall\, u, w \in V \quad \beta(fu, fw) = \beta(u, w)$$

или, что то же самое, если $f^*\beta f = \beta$, где $\beta : V \to V^*$, $v \mapsto \beta(\,*\,, v)$ — корреляция формы β. Если форма $\beta = \tilde{q}$ является поляризацией квадратичной формы q, то в силу форм. (15-4) на стр. 232 для изометричности оператора f достаточно, чтобы он сохранял квадратичную форму q, т. е. чтобы $q(fv) = q(v)$ для всех $v \in V$. Поэтому группу изометрий O_β симметричной билинейной формы $\beta = \tilde{q}$ также называют *ортогональной группой* квадратичной формы q и обозначают O_q.

Пример 15.2 (изометрии гиперболической плоскости)
Оператор $f : H_2 \to H_2$ имеющий в гиперболическом базисе e, e^* матрицу

$$F = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

является изометрическим оператором гиперболической формы, когда

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

что равносильно уравнениям $ac = bd = 0$ и $ad+bc = 1$, имеющим два семейства решений:

$$F_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \widetilde{F}_\lambda = \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ \lambda^{-1} & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{где } \lambda \in \Bbbk^* \text{ любое.} \tag{15-6}$$

Если основное поле $\Bbbk = \mathbb{R}$, то оператор F_λ с $\lambda > 0$ называется *гиперболическим поворотом*, поскольку траектория каждого ненулевого вектора $v = (x, y)$ при действии на него операторов F_λ с $\lambda \in (0, \infty)$ представляет собой гиперболу $xy = \mathrm{const}$. Если положить $\lambda = e^t$

[1] см. n° 14.2.1 на стр. 218

и перейти к ортогональному базису $p = (e + e^*)/\sqrt{2}$, $q = (e - e^*)/\sqrt{2}$, оператор F_λ запишется в нём матрицей

$$\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} t & \operatorname{sh} t \\ \operatorname{sh} t & \operatorname{ch} t \end{pmatrix}$$

аналогичной матрице поворота евклидовой плоскости. При $\lambda < 0$ оператор F_λ является композицией гиперболического поворота с центральной симметрией относительно нуля. В обоих случаях операторы F_λ собственные и лежат в $\mathrm{SL}(\mathbb{R}^2)$, т. е. сохраняют площадь. Операторы $\widetilde{F}_\lambda$ несобственные и являются композициями гиперболических поворотов с отражением относительно оси гиперболы. Они сохраняют абсолютную величину площади, но меняют ориентацию.

15.3.1. Отражения. С каждым анизотропным вектором $e \in V$ связано прямое ортогональное разложение $V = \Bbbk \cdot e \oplus e^\perp$, где $e^\perp = \{v \in V \mid \beta(e, v) = 0\}$. Линейный оператор

$$\sigma_e : V \to V\,, \quad v \mapsto \sigma_e(v) \overset{\text{def}}{=} v - 2\,\frac{\beta(e,v)}{\beta(e,e)} \cdot e \tag{15-7}$$

тождественно действует на $e^\perp$ и переводит e в $-e$. Поэтому $\sigma_e \in \mathrm{O}_\beta$ и $\sigma_e^2 = 1$. Оператор (15-7) называется *отражением в гиперплоскости* $e^\perp$ (см. рис. 15◇1).

Упражнение 15.4. Убедитесь, что для любой изометрии $f : V \to V$ и любого анизотропного $e \in V$ выполняется равенство $f \circ \sigma_e \circ f^{-1} = \sigma_{f(e)}$.

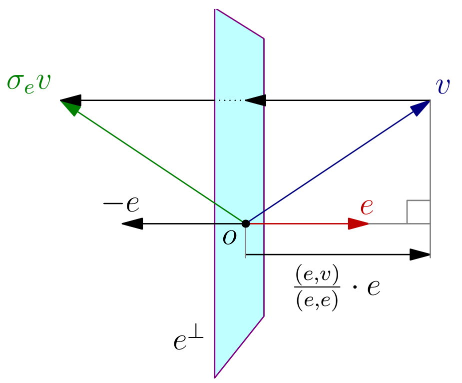

Рис. 15◇1. Отражение σ_e.

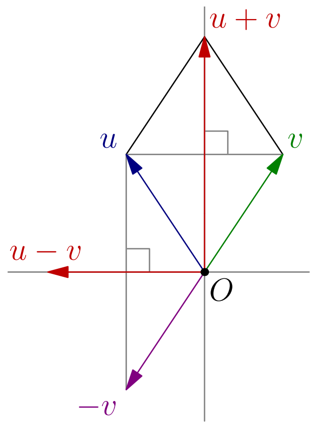

Рис. 15◇2. Отражения в ромбе.

Лемма 15.2
В пространстве с невырожденной симметричной билинейной формой β для любых двух различных анизотропных векторов u, v с равными скалярными квадратами $\beta(u,u) = \beta(v,v) \neq 0$ существует отражение, переводящее u либо в v либо в $-v$.

Доказательство. Если u и v коллинеарны, то искомым отражением является $\sigma_v = \sigma_u$. Если u и v неколлинеарны, то хотя бы одна из двух диагоналей натянутого на них ромба (см. рис. 15◇2) анизотропна. В самом деле, эти диагонали ортогональны между собою: $\beta(u+v, u-v) = \beta(u,u) - \beta(v,v) = 0$, и если бы они обе имели нулевые скалярные квадраты, то ограничение формы на их линейную оболочку, совпадающую с линейной оболочкой векторов u и v, было бы нулевым, что не так. Отражение σ_{u-v} переводит u в v, а отражение σ_{u+v} переводит u в $-v$. □

Упражнение 15.5. Проверьте последние два утверждения прямым вычислением и покажите, что если пространство V анизотропно, то всегда существует отражение, переводящее u в точности в v.

Теорема 15.3
Всякая изометрия n-мерного пространства с невырожденной симметричной формой является композицией не более $2n$ отражений.

Доказательство. Индукция по n. Ортогональная группа одномерного пространства состоит из тождественного оператора E и отражения $-E$. Рассмотрим изометрию $f : V \xrightarrow{\sim} V$ n-мерного пространства. Выберем в V какой-нибудь анизотропный вектор v и обозначим через σ отражение, переводящее $f(v)$ либо в v, либо в $-v$. Композиция σf переводит v в $\pm v$, а значит, переводит в себя $(n-1)$-мерную гиперплоскость $v^{\perp}$. По индукции, действие σf на $v^{\perp}$ является композицией не более $2(n-1)$ отражений. Продолжим гиперплоскости в $v^{\perp}$, относительно которых происходили эти отражения, до гиперплоскостей в V, добавив к ним вектор v. Тогда композиция $2n-2$ отражений в этих расширенных гиперплоскостях совпадает σf на $v^{\perp}$, и σf либо равен этой композиции, либо получается из неё применением ещё одного отражения в гиперплоскости $v^{\perp}$, переводящего v в $-v$. В любом случае, σf является композицией не более $2n-1$ отражений. Следовательно, $f = \sigma\sigma f$ это композиция не более $2n$ отражений. □

Упражнение 15.6. Докажите, что любая изометрия n-мерного анизотропного пространства является композицией $\leqslant n$ отражений.

Теорема 15.4 (лемма Витта)
Пусть на пространствах U, V, W заданы какие-то невырожденные симметричные билинейные формы. Если существует изометрический изоморфизм прямой ортогональной суммы $U \oplus V$ с прямой ортогональной суммой $U \oplus W$, то существует изометрический изоморфизм V с W.

Доказательство. Индукция по $\dim U$. Если $U = 0$, доказывать нечего. Если $\dim U = 1$, то $U = \Bbbk \cdot u$, где u анизотропен. Пусть имеется изометрический изоморфизм ортогональных прямых сумм $f : \Bbbk \cdot u \oplus V \xrightarrow{\sim} \Bbbk \cdot u \oplus W$. Рассмотрим отражение σ второго пространства, переводящее $f(u)$ в $\pm u$. Изометрический изоморфизм σf переводит $\Bbbk \cdot u$ в $\Bbbk \cdot u$, а значит, изоморфно отображает ортогональное дополнение к u в первом пространстве на ортогональное дополнение к u во втором, т. е. даёт искомый изометрический изоморфизм $\sigma f : V \xrightarrow{\sim} W$. Если $\dim U > 1$, то выберем в U какой-нибудь анизотропный вектор u и рассмотрим ортогональное разложение $U = \Bbbk \cdot u \oplus u^{\perp}$. Применяя предположение индукции к $U = \Bbbk \cdot u$ получим изометрический изоморфизм $u^{\perp} \oplus V$ с $u^{\perp} \oplus W$. Второй раз применяя индуктивное предположение с $U = u^{\perp}$, получаем искомую изометрию V с W. □

Следствие 15.4

Построенное в теореме (теор. 15.2) разложение пространства V с невырожденной симметричной билинейной формой в прямую ортогональную сумму гиперболического и анизотропного подпространств единственно в том смысле, что для любых двух таких разложений $V = H_{2k} \oplus U = H_{2m} \oplus W$ анизотропные подпространства U и W изометрически изоморфны, а гиперболические пространства имеют равные размерности $2k = 2m$.

Доказательство. Пусть $m \geqslant k$, так что $H_{2m} = H_{2k} \oplus H_{2(m-k)}$. Тождественное отображение $\mathrm{Id}_V : H_{2k} \oplus U \xrightarrow{\sim} H_{2k} \oplus H_{2(m-k)} \oplus W$ является изометрическим изоморфизмом. По лемме Витта существует изометрический изоморфизм $U \xrightarrow{\sim} H_{2(m-k)} \oplus W$. Поскольку в U нет изотропных векторов, гиперболическое подпространство $H_{2(m-k)}$ нулевое. Таким образом, $k = m$ и U изометрически изоморфно W. □

Следствие 15.5

Пусть подпространства U, W в в пространстве V с невырожденной симметричной билинейной формой таковы, что ограничения формы на U и на W невырождены и существует изометрический изоморфизм $\varphi : U \xrightarrow{\sim} W$. Тогда φ продолжается (многими способами) до изометрического автоморфизма всего пространства V, совпадающего с φ на подпространстве U.

Доказательство. Достаточно показать, что в условиях теоремы ортогоналы $U^\perp$ и $W^\perp$ изометрически изоморфны: тогда для любого изометрического изоморфизма $\psi : U^\perp \xrightarrow{\sim} W^\perp$, отображение $U \oplus U^\perp = V \to V = W \oplus W^\perp$, $(u, u') \mapsto \big(\varphi(h'), \psi(u')\big)$ даст требуемое продолжение. По условию, отображения $\eta : U \oplus U^\perp \to V$, $(u, u') \mapsto u + u'$ и $\zeta : U \oplus W^\perp \to V$, $(u, w') \mapsto \varphi(u) + w'$, являются изометрическими изоморфизмами. Поэтому композиция $\zeta^{-1}\eta : U \oplus U^\perp \xrightarrow{\sim} U \oplus W^\perp$ тоже является изометрическим изоморфизмом. По лемме Витта $U^\perp$ и $W^\perp$ изометрически изоморфны. □

Следствие 15.6

Ортогональная группа любой невырожденной симметричной билинейной формы транзитивно действует на гиперболических и на изотропных подпространствах данной размерности.

Доказательство. Утверждение про гиперболические подпространства вытекает из предыдущего следствия. Утверждение про изотропные подпространства сводится к утверждению про гиперболические подпространства при помощи лем. 15.1. □

Пример 15.3 (квадратичные формы над $\mathbb{F}_p$ при $p > 2$)

Зафиксируем какой-нибудь не квадрат $\varepsilon \in \mathbb{F}_p$. В n° 3.5.2 мы видели, что ненулевые квадраты образуют в мультипликативной группе поля $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/(p)$ подгруппу индекса 2. Поэтому любой ненулевой элемент $\mathbb{F}_p$ умножением на подходящий ненулевой квадрат может быть сделан равным либо 1, либо ε. Из теор. 15.1 вытекает тогда, что всякая квадратичная форма над $\mathbb{F}_p$ обратимой линейной заменой переменных приводится к виду

$$q(x) = \sum x_i^2 + \varepsilon \sum x_j^2 \tag{15-8}$$

(наборы переменных в первой и второй сумме не пересекаются). Заметим, что уравнение

$$ax_1^2 + bx_2^2 = c \tag{15-9}$$

разрешимо в $\mathbb{F}_p$ при любых ненулевых a, b и любом c, поскольку когда x_1 и x_2 независимо друг от друга пробегают поле $\mathbb{F}_p$, функции ax_1^2 и $c - bx_2^2$ принимают по $(p+1)/2$ различных значений, так что эти множества значений имеют хотя бы один общий элемент $ax_1^2 = c - bx_2^2$. Разрешимость уравнения (15-9) означает, что каждая невырожденная квадратичная форма q на двумерном пространстве принимает все значения из поля $\Bbbk$. В частности, существует вектор e с $q(e) = 1$, а значит, координаты, в которых форма q имеет вид $x_1^2 + x_2^2$ или $x_1^2 + \varepsilon x_2^2$. Это позволяет сделать вторую сумму в (15-8) состоящей из не более, чем одного слагаемого, т. е. каждая квадратичная форма q ранга r над полем $\mathbb{F}_p$ в подходящих координатах записывается как $x_1^2 + \dots + x_{r-1}^2 + x_r^2$, если $\det q$ квадрат, или как $x_1^2 + \dots + x_{r-1}^2 + \varepsilon x_r^2$, если $\det q$ не квадрат.

Из разрешимости уравнения (15-9) также вытекает, что невырожденная квадратичная форма $ax_1^2 + bx_2^2 + cx_3^2 + \ \cdots$ от не менее трёх переменных всегда имеет ненулевой изотропный вектор — например, вектор $(\alpha_1,\ \alpha_2,\ 1,\ 0,\ \dots)$ с $a\alpha_1^2 + b\alpha_2^2 = -c$. Поэтому анизотропные формы над полем $\mathbb{F}_p$ бывают только в размерностях 1 и 2 и с точностью до изоморфизма исчерпываются невырожденными одномерными формами x^2 и εx^2 и двумерными формами $x_1^2 + x_2^2$, когда $p \equiv -1 \pmod 4$ и $x_1^2 + \varepsilon x_2^2$, когда $p \equiv 1 \pmod 4$.

Упражнение 15.7. Покажите, что форма $x_1^2 + x_2^2$ гиперболична при $p \equiv 1 \pmod 4$ и анизотропна при $p \equiv -1 \pmod 4$, а форма $x_1^2 + \varepsilon x_2^2$, наоборот, анизотропна при $p \equiv 1 \pmod 4$ и гиперболична при $p \equiv -1 \pmod 4$.

Таким образом, квадратичная форма над полем $\mathbb{F}_p$ либо гиперболична, либо является прямой ортогональной суммой гиперболической формы и одной из четырёх перечисленных выше анизотропных форм.

Пример 15.4 (вещественные квадратичные формы)

В силу теор. 15.1, всякая вещественная квадратичная форма q от n вещественных переменных линейной заменой координат преобразуется к виду

$$q(x) = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - x_{p+2}^2 - \dots - x_{p+m}^2 \,. \tag{15-10}$$

Для этого достаточно построить в $\mathbb{R}^n$ какой-нибудь базис $e_1, e_2, \dots, e_n$ с диагональной матрицей Грама, а затем поделить каждый e_i с $q(e_i) \neq 0$ на $\sqrt{|q(e_i)|}$.

Числа p и m называются *положительным* и *отрицательным индексами инерции* квадратичной формы q, а их разность $p - m$ — просто *индексом* формы q. Пару чисел (p, m) также называют *сигнатурой* формы β. Сумма $p + m = \operatorname{rk} q$ не зависит от выбора базиса, в котором q имеет вид (15-10). Покажем, что каждый из индексов p, m также не зависит от этого выбора. Заменяя V на фактор $V / \ker q$, мы можем считать, что форма q невырождена. Тогда она раскладывается в ортогональную прямую сумму гиперболической и анизотропной формы. Двумерная вещественная форма сигнатуры $(1,1)$ гиперболична, поскольку $x_1^2 - x_2^2 = (x_1 + x_2)(x_1 - x_2) = 2y_1y_2$, где $y_{1,2} = (x_1 \pm x_2)/\sqrt{2}$. Поэтому над полем $\mathbb{R}$ в каждой размерности с точностью до изоморфизма имеются ровно две неизоморфные анизотропные формы: *положительно определённая* (или *евклидова*), для которой $\beta(v,v) > 0\ \forall\ v \neq 0$, и *отрицательно определённая*, для которой $\beta(v,v) < 0\ \forall\ v \neq 0$. Их матрицы Грама в подходящих базисах равны E и $-E$. Таким образом, форма (15-10) является ортогональной прямой суммой гиперболической формы h размерности $2\min(p,m)$ и анизотропной формы α размерности $|p - m|$, которая положительно определена, если

$p > m$ и отрицательно определена, если $p < m$. Из единственности разложения в ортогональную прямую сумму гиперболической и анизотропной формы вытекает, что числа $p - m$ и $\min(p, m)$ не зависят от способа разложения, а числа p и m однозначно по ним восстанавливаются. Мы доказали

Следствие 15.7
Две квадратичных формы с вещественными коэффициентами тогда и только тогда переводятся друг в друга обратимой линейной заменой переменных, когда они имеют одинаковый ранг и индекс. □

Упражнение 15.8. Докажите, что положительный индекс инерции формы q равен наибольшей из размерностей подпространств, на которые q ограничивается в положительно определённую форму, а отрицательный — наибольшей из размерностей подпространств, на которые q ограничивается в отрицательно определённую форму.

Пример 15.5 (отыскание сигнатуры вещественной формы)
Рассмотрим матрицу Грама формы q в произвольном базисе и обозначим через $\varDelta_i$ её *главный угловой минор*, стоящей в первых i строках и первых i столбцах. Этот минор является определителем Грама ограничения формы q на линейную оболочку V_i первых i базисных векторов $e_1, e_2, \dots, e_i$. Он зануляется, если $q|_{V_i}$ вырождена, и имеет знак $(-1)^{m_i}$, если $q|_{V_i}$ невырождена и имеет отрицательный индекс инерции m_i. Таким образом, читая слева направо последовательность $\varDelta_1, \varDelta_2, \dots, \varDelta_{\dim V}$ можно проследить за последовательным изменением сигнатуры формы $q|_{V_i}$ при переходе от V_i к V_{i+1} или за появлением у формы q изотропных векторов, что позволяет найти сигнатуру всякий раз, когда в этой последовательности нет двух подряд стоящих нулей.

Пусть, например, $\varDelta_1 < 0$, $\varDelta_2 = 0$, $\varDelta_3 < 0$, $\varDelta_4 > 0$. Так как ограничение $q|_{V_2}$ вырождено, в V_2 имеется изотропный вектор. Поэтому невырожденная форма $q|_{V_3}$ является суммой гиперболической плоскости сигнатуры $(1, 1)$ и одномерного анизотропного пространства, т. е. имеет сигнатуру $(2, 1)$ или $(1, 2)$. Поскольку $\varDelta_3 < 0$, сигнатура $(p, m)_{V_3} = (2, 1)$. Из $\varDelta_4 > 0$ вытекает, что на всём пространстве сигнатура $(p, m)_V = (2, 2)$.

Когда ни один из главных угловых миноров не обращается в нуль, ограничение формы на каждое из пространств V_i невырождено, и знак у $\varDelta_{i+1}$ отличается от знака $\varDelta_i$ тогда и только тогда, когда $m_{i+1} = m_i + 1$. Поэтому полный отрицательный индекс инерции m формы q равен числу перемен знака в последовательности $1, \varDelta_1, \varDelta_2, \dots, \varDelta_{\dim V}$. Это наблюдение называется *критерием Сильвестра.*

15.4. Проективные квадрики. Множество одномерных изотропных подпространств квадратичной формы $q \in S^2V^*$, понимаемое как множество точек проективного пространства[1] $\mathbb{P}(V)$, ассоциированного с векторным пространством V, обозначается

$$V(q) = \{ v \in \mathbb{P}(V) \mid q(v) = 0 \},$$

[1] мы полагаем, что читатель знаком с проективными пространствами по курсу геометрии; если это не так, см. мою лекцию по геометрии http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/geom_ru/lec_09.pdf или §18 из книги http://vyshka.math.ru/pspdf/textbooks/gorodentsev/algebra-1.pdf

и называется *проективной квадрикой*. Поскольку пропорциональные квадратичные форму задают одну и ту же квадрику, квадрики как геометрические фигуры являются точками проективного пространства $\mathbb{P}(S^2V^*)$, которое мы будем называть *пространством квадрик* в $\mathbb{P}(V)$.

Согласно сл. 15.3 уравнение квадрики $V(q) \subset \mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$ в подходящих однородных координатах имеет вид

$$x_0x_1 + x_2x_3 + \dots + x_{2m}x_{2m+1} + \alpha(x_{2m+2}, \dots, x_r) = 0\,, \tag{15-11}$$

где форма $\alpha(x)$ анизотропна[1]. Число входящих в уравнение переменных равно рангу $\operatorname{rk} q$ квадратичной формы q, а линейная оболочка остальных $n-r$ базисных векторов, координаты вдоль которых не задействованы в (15-11), составляет ядро формы q. Число $2(m+1)$ в уравнении (15-11) равно размерности гиперболического ортогонального слагаемого формы q и по сл. 15.4 не зависит от выбора координат, где форма q имеет вид (15-11). Две квадрики называются *изоморфными* (или *проективно эквивалентными*), если одна переводится в другую линейным проективным автоморфизмом[2].

Мы обозначаем через $\tilde q : V \times V \to \Bbbk$ поляризацию квадратичной формы q, а через $\hat q : V \to V^*$ оператор корреляции[3] билинейной симметричной формы $\tilde q$. Проективизация ядра корреляции

$$\operatorname{Sing} Q \overset{\text{def}}{=} \mathbb{P}(\ker \hat q) = \mathbb{P}\{w \in V \mid \forall\, u \in V\ \tilde{(}u, w) = 0\} \tag{15-12}$$

называется *множеством особых точек* (или *вершинным пространством*) квадрики $V(q)$. Квадрика называется *гладкой* или *невырожденной*, если вершинное пространство пусто, и *особой* или *вырожденной* — в противном случае. Так как вершинное пространство особой квадрики, очевидно, лежит на ней, вырожденная квадрика никогда не пуста.

Пример 15.6 (квадрики на прямой)
На проективной прямой $\mathbb{P}_1$ над произвольным полем $\Bbbk$ характеристики $\operatorname{char}(\Bbbk) \neq 2$ имеется единственная с точностью до изоморфизма вырожденная квадрика, которая в подходящих координатах задаётся уравнением $x_0^2 = 0$ и по этой причине называется *двойной точкой*. Неособая квадрика $V(q)$, у которой $-\det q$ является квадратом, задаётся в подходящих координатах уравнением $x_0x_1 = 0$ и представляет собой пару различных точек. Неособая квадрика $V(q)$, у которой $-\det q$ не квадрат, пуста. Таким образом, пересечение произвольной квадрики $Q \subset \mathbb{P}_n$ с произвольной прямой ℓ либо совпадает с ℓ, либо является двойной точкой, либо парой различных точек, либо пусто, причём над алгебраически замкнутым полем последнее невозможно.

Упражнение 15.9. Покажите, что $p \in \operatorname{Sing} Q$ тогда и только тогда, когда каждая проходящая через p прямая либо лежит на Q либо пересекает Q по двойной точке p.

[1] $\alpha(x) \neq 0$ при $x \neq 0$

[2] т. е. биективным отображением $\mathbb{P}(V) \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}(V)$, индуцированным невырожденным линейным оператором $V \xrightarrow{\sim} V$

[3] напомню, он переводит вектор $v \in V$ в линейную форму $u \mapsto \tilde q(u, v)$ на V

Теорема 15.5
Пересечение $Q' = L \cap Q$ произвольной квадрики $Q \subset \mathbb{P}(V)$ с любым дополнительным[1] к $\operatorname{Sing} Q$ проективным подпространством $L \subset \mathbb{P}(V)$ представляет собой гладкую квадрику в L, и квадрика Q является *линейным соединением*[2] этой неособой квадрики Q' и вершинного пространства $\operatorname{Sing} Q$.

Доказательство. Первое утверждение следует из предл. 14.6. Второе — из упр. 15.9: любая не лежащая в $\operatorname{Sing} Q$, но пересекающая $\operatorname{Sing} Q$ прямая имеет вид (ab) с $a \in \operatorname{Sing} Q$ и $b \in L$ и либо целиком лежит на квадрике Q и в этом случае $b \in L \cap Q = Q'$, либо пересекает Q по двойной точке a и в этом случае $b \notin Q'$. □

15.4.1. Гладкие квадрики. Линейные проективные автоморфизмы $\overline{F} : \mathbb{P}(V) \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}(V)$, индуцированные изометриями $F \in \mathrm{O}_q$ невырожденной квадратичной формы q, переводят квадрику $V(q)$ в себя и называются *автоморфизмами* этой квадрики. Согласно сл. 15.6 группа проективных автоморфизмов квадрики $V(q)$ транзитивно действует на точках квадрики, а также на лежащих на квадрике проективных подпространствах любой фиксированной размерности. Поэтому максимальная размерность проходящего через данную точку квадрики подпространства, лежащего на квадрике, одинакова для всех точек. Она называется *планарностью* квадрики. Неособые квадрики разной планарности, очевидно, проективно не эквивалентны. Планарность гладкой квадрики, заданной уравнением (15-11) с $r = n$ и анизотропной формой α, равна m. Таким образом, квадрики с разными размерностями гиперболических компонент проективно не эквивалентны. Если вся форма $q(x_0, x_1, \dots, x_n) = \alpha(x_0, x_1, \dots, x_n)$ анизотропна, то квадрика $V(q)$ пуста, и мы полагаем её планарность равной -1.

Пример 15.7 (гладкие квадрики над алгебраически замкнутым полем)
Поскольку над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$ имеется ровно одна анизотропная форма x^2, n-мерная гладкая квадрика $Q_n \subset \mathbb{P}_{n+1}$ над алгебраически замкнутым полем единственна и в подходящих координатах она задаётся при чётном $n = 2m$ уравнением

$$x_0x_1 + x_2x_3 + \cdots + x_{2m}x_{2m+1} = 0\,, \tag{15-13}$$

при нечётном $n = 2m + 1$ уравнением

$$x_0x_1 + x_2x_3 + \cdots + x_{2m}x_{2m+1} = x_{2m+2}^2\,. \tag{15-14}$$

Через каждую точку обеих квадрик (15-13) и (15-14) проходит m-мерное проективное подпространство, лежащее на квадрике, и подпространств большей размерности на этих квадриках нет.

Пример 15.8 (гладкие вещественные квадрики)
Поскольку над полем $\Bbbk = \mathbb{R}$ в каждой размерности k имеется единственная с точностью до знака анизотропная форма $\alpha_k(x_1, x_2, \dots, x_k) = \sum\limits_{i=1}^{k} x_i^2$, гладкая n-мерная вещественная квадрика в $\mathbb{P}_{n+1} = \mathbb{P}\left(\mathbb{R}^{n+2}\right)$ в подходящих координатах имеет вид

$$x_0x_1 + x_2x_3 + \cdots + x_{2m}x_{2m+1} = x_{2m+2}^2 + x_{2m+3}^2 + \cdots + x_{n+1}^2\,, \tag{15-15}$$

[1] напомню, что проективные подпространства $K = \mathbb{P}(U)$ и $L = \mathbb{P}(W)$ в $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$ называются *дополнительными*, если $K \cap L = \varnothing$ и $\dim K + \dim L = n - 1$ или, что то же самое, если $V = U \oplus W$

[2] т. е. объединением всех прямых (ab) с $a \in Q'$ и $b \in \operatorname{Sing} Q$

где $-1 \leqslant m \leqslant n/2$. Мы будем называть такую квадрику *m-планарной* и обозначать $Q_{n,m}$. Иначе m-планарную квадрику $Q_{n,m}$ можно охарактеризовать как квадрику сигнатуры $(n+2-m, m)$ или как как квадрику индекса $n+2-2m$. В координатах Лагранжа уравнение квадрики $Q_{n,m}$ имеет вид

$$t_0^2 + t_1^2 + \cdots + t_m^2 = t_{m+1}^2 + t_{m+2}^2 + \cdots + t_{n+1}^2 \,. \tag{15-16}$$

Переход от гиперболических координат x_ν к лагранжевым координатам t_ν задаётся формулами $x_{2i} = t_{m+i} + t_i$, $x_{2i+1} = t_{m+i} - t_i$ при $0 \leqslant i \leqslant m$ и $x_j = t_j$ при $2m+2 \leqslant j \leqslant n+2$.

Квадрики разной планарности проективно неэквивалентны, так как через каждую точку m-планарной квадрики проходит m-мерное проективное подпространство, лежащее на квадрике, и подпространств большей размерности на $Q_{n,m}$ нет. В частности, (-1)-планарная квадрика $t_0^2 + t_1^2 + \cdots + t_n^2 = 0$ пуста. Непустая не содержащая прямых квадрика планарности нуль $t_0^2 = t_1^2 + t_2^2 + \cdots + t_n^2$ называется *эллиптической*. Квадрики большей планарности называются *гиперболическими*.

15.4.2. Касательные пространства. Прямая ℓ, проходящая через точку $p \in Q$, называется *касательной* к квадрике Q в точке p, если она лежит на Q или пересекает Q по двойной точке p. Объединение всех прямых, касательных к квадрике Q в точке $p \in Q$, называется *касательным пространством* к Q в p и обозначается T_pQ.

Предложение 15.2
Прямая (ab) касается квадрики $V(q)$ в точке $a \in Q$ тогда и только тогда, когда $\tilde{q}(a,b) = 0$.

Доказательство. Ограничение формы q на линейную оболочку векторов $a, b \in V$ имеет в базисе a, b матрицу Грама

$$G = \begin{pmatrix} 0 & \tilde{q}(a,b) \\ \tilde{q}(b,a) & \tilde{q}(b,b) \end{pmatrix} .$$

Оно тождественно нулевое или особое тогда и только тогда, когда $\det G = 0$, что равносильно равенству $\tilde{q}(a,b) = \tilde{q}(b,a) = 0$. $\square$

Следствие 15.8
Видимый из точки $b \notin V(q)$ контур[1] квадрики $V(q)$ высекается из неё гиперплоскостью $\operatorname{Ann}\hat{q}(b) = \{x \mid \tilde{q}(b,x) = 0\}$. Если точка $p \in V(q)$ неособа, то $T_pV(q) = \{x \in \mathbb{P}_n \mid \tilde{q}(p,x) = 0\}$ является гиперплоскостью в $\mathbb{P}_n$, а если точка $p \in \operatorname{Sing} V(q)$, то $T_pV(q) = \mathbb{P}_n$ совпадает со всем пространством.

Доказательство. Если $b \notin V(q)$, то $\tilde{(}b,b) = q(b) \neq 0$ и линейное уравнение $\tilde{q}(b,x) = 0$ нетривиально. Если $p \in V(q)$, то уравнение $\tilde{q}(p,x) = 0$ имеет вид $0 = 0$ и выполняется для всех точек $x \in \mathbb{P}_n$, если и только если точка $p \in \operatorname{Sing} V(q)$. $\square$

Замечание 15.1. Линейное уравнение $\tilde{q}(p,x) = 0$, задающее касательное пространство $T_pV(q) \subset \mathbb{P}_n$ в точке $p \in V(q)$, может быть записано как

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{\partial q}{\partial x_i}(p) \cdot x_i = 0 \,.$$

[1]т. е. ГМТ касания с $V(q)$ всевозможных касательных, опущенных на $V(q)$ из b

В частности, точка p особа, если и только если все частные производные $\frac{\partial q}{\partial x_i}(p) = 0$.

Упражнение 15.10. Покажите, что $\operatorname{Sing} Q = \bigcap\limits_{p\in Q} T_pQ$.

Пример 15.9 (коника Веронезе)
Над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$ квадрики на проективной прямой $\mathbb{P}_1$ суть то же самое, что неупорядоченные пары точек на $\mathbb{P}_1$. Поэтому неупорядоченные пары точек $\{a, b\}$ на $\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}(U)$, $\dim U = 2$, биективно параметризуются точками проективной плоскости $\mathbb{P}_2 = \mathbb{P}(S^2U^*)$ по правилу

$$\{a, b\} \leftrightarrow q_{a,b}(t) = \det(t, a) \cdot \det(t, b)\,. \tag{15-17}$$

При этом парам совпадающих точек $\{a, a\}$ отвечают вырожденные квадрики $\det^2(t, a)$, являющиеся квадратами линейных форм. Если зафиксировать в U и U^* двойственные базисы (e_0, e_1) и (t_0, t_1), а в качестве базиса в S^2U^* взять $(t_0^2, 2t_0t_1, t_1^2)$, так что квадратичная форма $q(t) = x_0t_0^2 + 2x_1\,t_0t_1 + x_2t_1^2$ с матрицей Грама $\begin{pmatrix} x_0 & x_1 \\ x_1 & x_2 \end{pmatrix}$ будет иметь в нём однородные координаты $(x_0 : x_1 : x_2)$, то паре точек $a = (\alpha_0 : \alpha_1)$ и $b = (\beta_0, \beta_1)$ на $\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}(U)$ соответствие (15-17) сопоставит точку $x \in \mathbb{P}_2 = \mathbb{P}(S^2U^*)$ с координатами

$$x_0 = \alpha_1\beta_1\,, \quad x_1 = -(\alpha_0\beta_1 + \alpha_1\beta_0)/2\,, \quad x_2 = \alpha_0\beta_0\,, \tag{15-18}$$

а пары совпадающих точек $\{a, a\}$ составят гладкую *конику Веронезе C* с уравнением

$$\det\begin{pmatrix} x_0 & x_1 \\ x_1 & x_2 \end{pmatrix} = x_0x_2 - x_1^2 = 0\,. \tag{15-19}$$

Вложение Веронезе $\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}(U) \hookrightarrow \mathbb{P}_2 = \mathbb{P}(S^2U^*)$, сопоставляющее точке $a = (\alpha_0 : \alpha_1)$ на $\mathbb{P}_1$ двойную точку $\{a, a\}$ на $\mathbb{P}_2$, биективно отображает прямую на конику (15-19) по правилу

$$(\alpha_0 : \alpha_1) \mapsto (x_0 : x_1 : x_2) = (\alpha_1^2 : -\alpha_0\alpha_1 : \alpha_0^2)\,. \tag{15-20}$$

Поскольку при фиксированном $a \in U$ и переменном $b \in U$ квадратичные формы вида $\det(t, a)\det(t, b)$ образуют двумерное векторное подпространство в S^2U^*, пары точек вида $\{a, b\}$ с фиксированным a и переменным b составляют прямую на $\mathbb{P}_2$, касающуюся коники Веронезе C в точке $\{a, a\}$.

Упражнение 15.11. Покажите, что каждая линейная инволюция[1] на $\mathbb{P}_1$ имеет над алгебраически замкнутым полем ровно две различных неподвижных точки.

Из наличия у гладкой коники C на $\mathbb{P}_2$ квадратичной параметризации (15-20) вытекает, что гладкая коника C пересекается с кривой $D \subset \mathbb{P}_2$, заданной однородным уравнением $f(x) = 0$ степени d, не более, чем по $2d$ точкам, или целиком содержится в этой кривой в качестве компоненты. В самом деле, подставляя $(x_0 : x_1 : x_2) = (\alpha_1^2 : -\alpha_0\alpha_1 : \alpha_0^2)$ в $f(x) = 0$ получаем уравнение $f\big(x(\alpha)\big) = 0$, корнями которого являются значения параметра α в точках пересечения $C \cap D$ и которое либо выполнено тождественно по α, либо является однородным многочленом степени $2d$ и имеет не более $2d$ корней на $\mathbb{P}_1$. В частности, через 5 точек на $\mathbb{P}_2$ проходит не более одной гладкой коники.

[1] т. е. нетождественное отображение $\sigma : \mathbb{P}(U) \to \mathbb{P}(U)$, индуцированное каким-либо невырожденным линейным оператором $\widetilde{\sigma} : U \to U$ и удовлетворяющее соотношению $\sigma^2 = \mathrm{Id}_{\mathbb{P}(U)}$

Упражнение 15.12. Покажите, что над любым полем через любые 5 точек на $\mathbb{P}_2$ можно провести конику, причём если никакие 4 из 5 точек не коллинеарны, то такая коника единственна, а если никакие 3 не коллинеарны, то и гладка.

Пример 15.10 (квадрика Сегре)
Рассмотрим два 2-мерных векторных пространства U_- и U_+ и положим $W = \mathrm{Hom}(U_-, U_+)$. Операторы $U_- \to U_+$ ранга 1 образуют в $\mathbb{P}_3 = \mathbb{P}(W)$ *квадрику Сегре*

$$Q_s = \{F : U_- \to U_+ \mid \det F = 0\} = \left\{ \begin{pmatrix} x_0 & x_1 \\ x_2 & x_3 \end{pmatrix} \,\middle|\, x_0x_3 - x_1x_2 = 0 \right\}. \tag{15-21}$$

Если оператор $F : U_- \to U_+$ имеет ранг 1, то подпространство $\mathrm{im}\, F \subset U_+$ одномерно и порождается некоторыми вектором $v \in U_+$, который определяется по F однозначно с точностью до пропорциональности. Действие оператора F на произвольный вектор $u \in U_-$ происходит по правилу $F(u) = \xi(u) \cdot v$, где $\xi \in U_-^*$ однозначно определяется выбором v и порождает одномерное подпространство $\mathrm{Ann}\ker F \subset U_-^*$. Наоборот, для любых ненулевых $v \in U_+$ и $\xi \in U_-^*$ оператор

$$\xi \otimes v \;:\; U_- \to U_+, \quad u \mapsto \xi(u)\, v, \tag{15-22}$$

имеет ранг 1. Таким образом, *вложение Сегре*

$$s : \mathbb{P}(U_-^*) \times \mathbb{P}(U_+) \hookrightarrow \mathbb{P}\,\mathrm{Hom}(U_-, U_+), \quad (\xi, v) \mapsto \xi \otimes v, \tag{15-23}$$

устанавливает биекцию между $\mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_1 = \mathbb{P}(U_-^*) \times \mathbb{P}(U_+)$ и квадрикой Сегре (15-21). Поскольку 2×2-матрицы ранга 1 имеют пропорциональные строки и столбцы и матрицы с фиксированными отношениями

$$\begin{gathered} ([\text{строка } 1] : [\text{строка } 2]) = (t_0 : t_1) \\ ([\text{столбец } 1] : [\text{столбец } 2]) = (\xi_0 : \xi_1) \end{gathered} \tag{15-24}$$

составляют двумерные векторные подпространства в W, проективизации этих двумерных подпространств образуют на квадрике Сегре два семейства прямых, таких что каждая точка квадрики является точкой пересечения пары прямых из разных семейств. Эти прямые являются образами координатных прямых $\mathbb{P}_1 \times v$ и $\xi \times \mathbb{P}_1$ на $\mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_1$ при вложении (15-23), т. к. оператор $\xi \otimes v$, отвечающий форме $\xi = (\xi_0 : \xi_1) \in U_-^*$ и вектору $v = (t_0 : t_1) \in U_+$, имеет матрицу

$$\xi \otimes v = \begin{pmatrix} t_0 \\ t_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \xi_0 & \xi_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_0 t_0 & \xi_1 t_0 \\ \xi_0 t_1 & \xi_1 t_1 \end{pmatrix} \tag{15-25}$$

строки и столбцы которой относятся как в (15-24). В силу биективности отображения Сегре, все соотношения инцидентности между координатными прямыми на $\mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_1$ сохранятся и между их образами на квадрике. Поэтому прямые в каждом из двух семейств (15-24) попарно скрещиваются, любые две прямые из разных семейств пересекаются, каждая точка квадрики Сегре является точкой пересечения двух прямых из различных семейств, и никаких других прямых на квадрике Сегре нет в силу того, что лежащая на Q_s прямая, проходящая через заданную точку $p \in Q_s$, содержится в конике $Q_s \cap T_p Q_s$, которая полностью исчерпывается парой пересекающихся в точке p образов координатных прямых с $\mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_1$.

Упражнение 15.13. Покажите, что любые 9 точек, а также любые 3 прямые в $\mathbb{P}_3$ лежат на некоторой квадрике, причём квадрика, проходящая через три попарно непересекающиеся прямые, автоматически является гиперболической квадрикой Сегре.

Предложение 15.3
Сечение $\Pi \cap Q$ неособой квадрики Q гиперплоскостью Π либо является неособой квадрикой в Π, либо имеет единственную особую точку p, и в этом случае плоскость $\Pi = T_pQ$, а квадрика $\Pi \cap Q$ является конусом с вершиной в p над неособой квадрикой $Q' = \Pi' \cap Q$, которая высекается из Q любой не проходящей через p гиперплоскостью $\Pi' \subset T_pQ$ и имеет на единицу меньшую планарность, чем Q.

Доказательство. Пусть $Q = V(q) \subset \mathbb{P}(V)$ и $\Pi = \mathbb{P}(W)$. Тогда

$$\dim\ker\left(\hat{q}|_W\right) = \dim\left(W \cap \hat{q}^{-1}(\operatorname{Ann} W)\right) \leqslant \\ \leqslant \dim \hat{q}^{-1}(\operatorname{Ann} W) = \dim \operatorname{Ann} W = \dim V - \dim W = 1\,.$$

Если $\dim\ker\left(\hat{q}|_W\right) = 1$ и это ядро порождается вектором p, то $p \in Q \cap \Pi$ и $\operatorname{Ann}(\hat{q}(p)) = W$, откуда $T_pQ = \Pi$. Наоборот, если $\Pi = T_pQ = \mathbb{P}(\operatorname{Ann}\hat{q}(p))$, то вектор $p \in \operatorname{Ann}\hat{q}(p)$ лежит в ядре ограничения $\hat{q}$ на $\operatorname{Ann}\hat{q}$ и порождает его, т. к. оно одномерно. Ограничение q на любую не проходящую через p гиперплоскость $\Pi' = \mathbb{P}(U) \subset T_pQ$ при этом невырождено, и пространство V является ортогональной прямой суммой $V = U \oplus U^{\perp}$, где $\dim U^{\perp} = 2$ и ограничение $q|_{U^{\perp}}$ тоже невырождено. Поскольку $p \in U^{\perp}$ является изотропным вектором для $q|_{U^{\perp}}$, подпространство $U^{\perp} \subset V$ — гиперболическая плоскость. Поэтому размерность гиперболической составляющей формы $q|_U$, задающей квадрику $Q' = \Pi' \cap Q$, на 2 меньше, чем у q . □

Следствие 15.9
Невырожденная квадрика либо пуста, либо не содержится ни в какой гиперплоскости.

Доказательство. Если непустая невырожденная квадрика содержится в гиперплоскости H, то $H = T_pQ$ для всех $p \in Q$ и $Q = Q \cap T_VQ$ должна быть особа. □

Следствие 15.10
Проективные подпространства размерности m на гладкой m-планарной квадрике $Q \subset \mathbb{P}_n$, проходящие через данную точку $p \in Q$, взаимно однозначно соответствуют всем $(m-1)$-мерным проективным подпространствам, лежащим на гладкой $(m-1)$-планарной квадрике $Q' \subset \mathbb{P}_{n-2}$, высекаемой из Q любой не проходящей через p гиперплоскостью $\mathbb{P}_{n-2} \subset T_pQ = \mathbb{P}_{n-1}$.

Пример 15.11 (подпространства на квадриках над алгебраически замкнутым полем)
Над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$ на нульмерной и одномерной гладких квадриках $Q_0 \subset \mathbb{P}_1$ и $Q_1 \subset \mathbb{P}_2$ лежат только 0-мерные подпространства. Следующие две квадрики — двумерная $Q_2 \subset \mathbb{P}_3$ и трёхмерная $Q_3 \subset \mathbb{P}_4$ — не содержат плоскостей, но каждая точка $p \in Q_2$ лежит на паре прямых, проходящих через p и две точки неособой квадрики $Q_0 \subset \mathbb{P}_1 \subset T_pQ_2 \smallsetminus \{p\}$, а через каждую точку $p \in Q_3$ проходит одномерное семейство прямых, образующих конус с вершиной p над гладкой коникой $Q_1 \subset \mathbb{P}_2 \subset T_pQ_4 \smallsetminus \{p\}$.

Квадрика Плюккера $Q_4 \subset \mathbb{P}_5$ не содержит 3-мерных подпространств, но через любую точку $p \in Q_4$ проходят два пучка[1] плоскостей, взаимно однозначно соответствующих двум семействам прямых на квадрике Сегре , и т. д.

Пример 15.12 (подпространства на вещественных квадриках)
Над полем вещественных чисел $\mathbb{R}$ на n-мерной эллиптической квадрике $Q_{n,0}$ нет прямых. Через каждую точку n-мерной 1-планарной квадрики $Q_{n,1}$ проходит целый конус прямых с основанием в $(n-2)$-мерной эллиптической квадрике $Q_{n-2,0} \subset \mathbb{P}_{n-1} \subset T_pQ_{n,1} \smallsetminus \{p\}$. Так, через каждую точку поверхности Сегре $Q_{2,1} \subset \mathbb{P}_3$ проходит ровно две прямые, образующие конус над двухточечной гиперболической квадрикой на $\mathbb{P}_1$. Плоскости, проходящие через каждую точку n-мерной 2-планарной квадрики $Q_{n,2}$ являются линейными соединениями этой точки со всевозможными прямыми, лежащими на $(n-2)$-мерной 1-планарной квадрике $Q_{n-2,1} \subset \mathbb{P}_{n-1} \subset T_pQ_{n,2} \smallsetminus \{p\}$ и т. д.

15.5. Аффинные квадрики. Выберем в аффинном пространстве $\mathbb{A}^n = \mathbb{A}(V)$ какой-нибудь аффинный репер и отождествим $\mathbb{A}^n$ с координатным пространством $\mathbb{k}^n$. Фигура, задаваемая в $\mathbb{A}^n$ (неоднородным) многочленом второй степени

$$f(x) = f_0 + f_1(x) + f_2(x)\,, \quad \text{где} \quad f_0 \in \mathbb{k}\,,\ f_1 \in V^*\,,\ f_2 \in S^2V^*\,, \tag{15-26}$$

от координат $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ пространства $\mathbb{k}^n$, называется *аффинной квадрикой*.

Упражнение 15.14. Покажите, что свойство фигуры $Q \subset \mathbb{A}^n$ быть аффинной квадрикой не зависит от выбора координатного репера.

Аффинные квадрики $Q' \subset \mathbb{A}^n$ и $Q'' \subset \mathbb{A}^n$ называются *аффинно эквивалентными* (или *изоморфными*), если имеется аффинный изоморфизм[2] $F : \mathbb{A}^n \xrightarrow{\sim} \mathbb{A}^n$, отображающий квадрику Q' в квадрику Q''.

15.5.1. Проективное замыкание аффинной квадрики. Аффинная квадрика Q, заданная неоднородным уравнением (15-26) в пространстве $\mathbb{A}^n = \mathbb{A}(\mathbb{k}^n)$ с координатами $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, является аффинным изображением в стандартной аффинной карте U_0, где $x_0 = 1$, своего проективного замыкания $\overline{Q} \subset \mathbb{P}_n$ — проективной квадрики, заданной в проективном пространстве $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(\mathbb{k}^{n+1})$ с координатами $(x_0 : x_1 : \dots : x_n)$ однородным уравнением

$$\overline{f}(x) = f_0 \cdot x_0^2 + x_0 \cdot f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) + f_2(x_1, x_2, \dots, x_n)\,. \tag{15-27}$$

Аффинная карта U_0 — это аффинное пространство над векторным пространством $\operatorname{Ann} x_0$, натянутым на базисные векторы $e_1, e_2, \dots, e_n$. Всякий аффинный автоморфизм

$$F : U_0 \xrightarrow{\sim} U_0\,,$$

отображающий аффинный координатный репер началом в точке $e_0 \in U_0$ и базисными векторами $e_1, e_2, \dots, e_n$ в аффинный координатный репер с началом в точке $e_0' \in U_0$ и базисными векторами $e_1', e_2', \dots, e_n' \in \operatorname{Ann} x_0$, является ограничением на карту U_0 проективного автоморфизма $\overline{F} : \mathbb{P}_n \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}_n$, индуцированного линейным оператором

$$\widetilde{F} : \mathbb{k}^{n+1} \xrightarrow{\sim} \mathbb{k}^{n+1}\,,$$

[1] напомним, что *пучок* в этом контексте означает семейство фигур, образующих *прямую* в подходящем проективном пространстве фигур, в данном случае — в пространстве плоскостей в $\mathbb{P}_4$, представляющем собою грассманиан $\operatorname{Gr}(3,5)$

[2] см. ?? на стр. ??

переводящим e_i в e_i' при всех $0 \leqslant i \leqslant n$. Наоборот, любой линейный автоморфизм $\widetilde{F} : \Bbbk^{n+1} \xrightarrow{\sim} \Bbbk^{n+1}$, переводящий в себя подпространство $\operatorname{Ann} x_0$, т. е. имеющий в базисе $e_0, e_1, \dots, e_n$ матрицу вида

$$\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline a_1 & & & \\ \vdots & & D_F & \\ a_n & & & \end{array}\right) \cdot \text{const}\,,$$

задаёт аффинный автоморфизм карты U_0, переводящий начало координат в точку $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ и имеющий дифференциал $D_F : \operatorname{Ann} x_0 \xrightarrow{\sim} \operatorname{Ann} x_0$.

Поэтому с проективной точки зрения описание аффинных квадрик с точностью до аффинного изоморфизма есть описание пар

«проективная квадрика $\overline{Q}$ + проективная гиперплоскость L_∞»

с точностью до проективных автоморфизмов, изоморфно отображающих одну гиперплоскость на другую. Соответствующие аффинные квадрики при этом будут аффинными изображениями проективных квадрик в аффинных картах, покрывающих дополнения к проективным гиперплоскостям — бесконечно удалённым гиперплоскостям этих аффинных карт.

Возникающая на этом пути классификация аффинных квадрик разбивает их на 4 класса: гладкие центральные квадрики, параболоиды, простые конусы и цилиндры.

15.5.2. Гладкие центральные квадрики. Пусть проективное замыкание $\overline{Q}$ аффинной квадрики Q гладко и бесконечно удалённая гиперплоскость L_∞ не является касательной гиперплоскостью к $\overline{Q}$. Тогда она пересекает $\overline{Q}$ по гладкой квадрике $Q_\infty = \overline{Q} \cap L_\infty$. В терминах уравнений это означает, что определитель Грама квадрики $\overline{Q}$ и определитель Грама квадратичной части $f_2(x_1, x_2, \dots, x_n)$ аффинного уравнения (15-26) оба отличны от нуля.

Полюс c бесконечно удалённой гиперплоскости L_∞ относительно квадрики $\overline{Q}$ называется *центром* аффинной квадрики Q. Он лежит в аффинной карте U_0 и является в ней центром симметрии аффинной квадрики Q, поскольку по **??** для любой прямой ℓ, проходящей через точку c и произвольную точку $d \in L_\infty \smallsetminus \overline{Q}$ и пересекающей квадрику в точках $a, b \in Q$, выполняется равенство $[d, c, b, a] = -1$, означающее, что в аффинной части $U_0 \cap \ell = \ell \smallsetminus d$ этой прямой точка c является серединой отрезка $[a, b]$.

По этой причине аффинные квадрики с гладким проективным замыканием, не касающимся бесконечно удалённой гиперплоскости, называются *гладкими центральными квадриками.*

В любой аффинной системе координат с центром в c аффинное уравнение квадрики имеет вид $f(x) = f_0 + f_2(x)$, где $f_0 \neq 0$, линейная форма f_1 отсутствует, а квадратичная форма f_2 невырождена. Выбирая в $\Bbbk^n$ координаты, в которых матрица Грама квадратичной формы f_2 диагональна, и деля обе части уравнения на f_0, приводим аффинное уравнение квадрики к виду

$$a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + \dots + a_n x_n^2 = 1\,. \tag{15-28}$$

Над алгебраически замкнутым полем перескалированием переменных это уравнение можно упростить до $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 1$. Тем самым, все центральные гладкие квадрики над алгебраически замкнутым полем аффинно эквивалентны.

Над полем $\mathbb{R}$ уравнение (15-28) упрощается до

$$x_1^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_{p+m}^2 = \pm 1\,, \quad \text{где} \quad p \geqslant m\,,\ p+m=n \tag{15-29}$$

и в случае $p = m = n/2$ в правой части стоит знак «плюс[1]». Среди этих квадрик есть ровно одна пустая — с уравнением[2] $\sum x_i^2 = -1$, а также ровно одна непустая квадрика, не пересекающая бесконечно удалённую гиперплоскость. Эта квадрика задаётся имеет уравнением $\sum x_i^2 = 1$ с $m = 0$ и плюсом в правой части. Она называется *эллипсоидом*. Эллипсоид компактен и как следствие — 0-планарен. Все остальные квадрики имеют непустое пересечение с бесконечностью (в частности, неограничены) и называются *гиперболоидами*.

При $p > m$ проекивное замыкание квадрики (15-29) с плюсом в правой части имеет сигнатуру $(p, m+1)$, и стало быть, такая квадрика m-планарна. Если в правой части (15-29) стоит минус, сигнатура проективного замыкания равна (p, m), и такая квадрика $(m-1)$-планарна. При $p = m = n/2$ квадрика (15-29) имеет планарность $n/divs2$. В частности, 0-планарные квадрики (15-29) исчерпываются эллипсоидом и *двуполостным гиперболоидом* $x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2 = x_n^2 - 1$.

Упражнение 15.15. Убедитесь, что двуполостный гиперболоид имеет две связных компоненты, а все остальные непустые квадрики (15-29) линейно связны.

Пересечение квадрики (15-29) с бесконечно удалённой гиперплоскостью задаётся в ней уравнением

$$x_1^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_{p+m}^2 = 0$$

и имеет планарность m (вне зависимости от того, какой знак стоит в правой части формулы (15-29)). Таким образом, среди квадрик (15-29) нет аффинно эквивалентных.

15.5.3. Параболоиды. Аффинные квадрики с гладким проективным замыканием $\overline{Q}$, для которых бесконечно удалённая гиперплоскость L_∞ является касательной гиперплоскостью, называются *параболоидами*.

Согласно предл. 15.3 пересечение $Q_\infty = L_\infty \cap \overline{Q}$ является в этом случае особой квадрикой с единственной особой точкой — точкой касания квадрики $\overline{Q}$ с бесконечно удалённой гиперплоскостью. В терминах уравнений это означает, что определитель Грама квадрики $\overline{Q}$ отличен от нуля, а матрица Грама квадратичной части $f_2(x_1, x_2, \dots, x_n)$ аффинного уравнения (15-26) имеет одномерное ядро.

Обозначим через $\tilde{f}$ поляризацию однородной формы (15-27), задающей проективную квадрику $\overline{Q}$, и пусть $u \in \operatorname{Ann} x_0$ порождает ядро формы f_2. Поскольку форма $\tilde{f}$ невырождена и $\tilde{f}(e_i, u) = 0$ для всех $1 \leqslant i \leqslant n$, скалярное произведение $\tilde{f}(e_0, u) \neq 0$, и на векторы e_0 и u натягивается гиперболическая плоскость. Выберем в ней гиперболический базис[3]

$$\varepsilon_0 = e_0 - \frac{1}{2} \cdot \frac{\tilde{f}(e_0, e_0)}{\tilde{f}(e_0, u)} \cdot u = e_0 - \frac{f_0 \cdot u}{f_1(u)} \tag{15-30}$$

$$\varepsilon_n = \frac{1}{\tilde{f}(e_0, u)} \cdot u = \frac{2u}{f_1(u)}\,, \tag{15-31}$$

[1]уравнение со знаком «−» получается из уравнения со знаком «+» сменой знака в обоих частях и перенумерацией переменных, так что задаваемые ими квадрики аффинно эквивалентны

[2]иногда её называют «мнимым эллипсоидом»

[3]т. е. сдвинем начало аффинной системы координат в точку $-u \cdot f_0 / \big(2 f_1(u)\big)$ и возьмём вектор $p/f_1(u)$ в качестве n-того базисного вектора в $\Bbbk^n$

а в $\tilde{f}$-ортогональном дополнении к ней[1] — базис $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{n-1}$, в котором матрица Грама ограничения формы $\tilde{f}$ диагональна. В локальных аффинных координатах относительно базиса[2] $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ уравнение квадрики Q примет вид

$$a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + \dots + a_{n-1} x_{n-1}^2 = x_n\,,$$

который над алгебраически замкнутым полем упрощается до

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{n-1}^2 = x_n\,,$$

а над полем вещественных чисел $\mathbb{R}$ — до

$$x_1^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_{p+m}^2 = x_n\,, \quad \text{где} \quad p \geqslant m \quad \text{и} \quad p + m = n - 1\,. \tag{15-32}$$

Параболоид (15-32) имеет планарность m. Таким образом, все параболоиды (15-32) непусты и неэквивалентны друг другу. Нуль-планарный параболоид $x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2 = x_n$ называется *эллиптическим параболоидом*, а все остальные — *гиперболическими параболоидами.*

15.5.4. Простые конусы. Аффинная квадрика Q, проективное замыкание которой $\overline{Q}$ особо, но не имеет особенностей на L_∞, называется *простым конусом.*

Поскольку проективное подпространство $\operatorname{Sing}(\overline{Q})$ не пересекается с гиперплоскостью L_∞, оно нульмерно. На языке формул это означает, что матрица Грама формы $\overline{f}$ имеет одномерное ядро, порождённое некоторым вектором $u \in U_0$, а форма f_2 невырождена, поскольку всякий вектор из $\ker f_2$, будучи ортогональным к u, автоматически попадает в $\ker \tilde{f}$.

Поместим начало отсчёта аффинной координатной системы в u и выберем в $\operatorname{Ann} x_0$ базис, в котором матрица Грама формы f_2 диагональна. В полученной системе аффинных координат уравнение квадрики Q имеет вид

$$a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + \dots + a_n x_n^2 = 0\,, \tag{15-33}$$

который над алгебраически замкнутым полем упрощается до

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 0\,, \tag{15-34}$$

а над полем $\mathbb{R}$ — до

$$x_1^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_{p+m}^2 = 0\,, \quad \text{где} \quad p \geqslant m \quad \text{и} \quad p + m = n\,. \tag{15-35}$$

Эти уравнения задают n-мерном аффинном пространстве $\mathbb{A}(\operatorname{Ann} x_0)$ аффинный конус с вершиной в нуле над гладкой проективной квадрикой в $\mathbb{P}_{k-1} = \mathbb{P}(\operatorname{Ann} x_0) = L_\infty$ — пересечением $\overline{Q} \cap L_\infty$. Над алгебраически замкнутым полем такая квадрика единственна, над полем $\mathbb{R}$ все они перечисляются формулой (15-35) и отличаются друг от друга планарностью, которая равна m. Отметим, что при $m = 0$ вещественная аффинная квадрика (15-35) состоит из единственной точки 0.

[1] т. е. в $(n-1)$-мерном векторном пространстве $\varepsilon_0^\perp \cap \operatorname{Ann} x_0 \subset \Bbbk^n$

[2] т. е. в аффинной системе координат на U_0 с началом в $\varepsilon_0 \in U_0$ и базисными векторами $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n \in \operatorname{Ann} x_0$

15.5.5. Цилиндры. Квадрика Q, проективное замыкание которой $\overline{Q}$ вырождено и имеет особенности на бесконечности, называется *цилиндром*. На языке формул это означает, что обе матрицы Грама $\overline{f}$ и f_2 вырождены.

Выберем в векторном пространстве $\operatorname{Ann} x_0$ базис $e_1, e_2, \dots, e_n$ так, чтобы векторы e_i с $i > r$ составляли базис в $\ker \tilde{f} \cap \operatorname{Ann} x_0 \neq 0$. Уравнение квадрики Q в таком базисе не зависит от координат x_i с $i > r$. Поэтому квадрика является прямым произведением аффинного пространства $\mathbb{A}^{n-r}$, направленного вдоль этих координат, и аффинной квадрики в $\mathbb{A}^r$, проективное замыкание которой в $\mathbb{P}^r$ не имеет особенностей на бесконечности. Все такие квадрики уже были перечислены нами выше.

Пример 15.13 (вещественные аффинные кривые второй степени)
Полный список непустых неизоморфных друг другу аффинных квадрик в $\mathbb{R}^2$ таков:

- *эллипс* $x_1^2 + x_2^2 = 1$ — гладкая центральная коника, не пересекающая бесконечно удалённую прямую $x_0 = 0$
- *гипербола* $x_1^2 - x_2^2 = 1$ — гладкая центральная коника, пересекающая бесконечно удалённую прямую $x_0 = 0$ по паре точек $(0 : 1 : 0)$ и $(0 : 0 : 1)$
- *парабола* $x_1^2 = x_2$ — гладкая коника, касающаяся бесконечно удалённой прямой $x_0 = 0$ в точке $(0 : 0 : 1)$
- *двойная точка* $x_1^2 + x_2^2 = 0$ — аффинный конус над гладкой пустой квадрикой в $\mathbb{P}_1$
- *пересекающиеся прямые* $x_1^2 - x_2^2 = 0$ — аффинный конус над парой точек в $\mathbb{P}_1$
- *параллельные прямые* $x_1^2 = 1$ — цилиндр над парой точек в $\mathbb{A}^1$, являющийся аффинным изображением особой проективной коники, распавшейся в пару прямых, пересекающихся на бесконечности в точке $(0 : 0 : 1)$
- *двойная прямая* $x_1^2 = 0$ — цилиндр над двойной точкой в $\mathbb{A}^1$, являющийся аффинным изображением двойной проективной прямой

Как мы уже много раз отмечали, эллипс, гипербола и парабола являются различными аффинными изображениями одной и той же гладкой вещественной прективной коники Веронезе, имеющей сигнатуру $(2, 1)$.

Пример 15.14 (вещественные аффинные поверхности второй степени)
Непустые гладкие центральные аффинные поверхности второй степени в $\mathbb{R}^3$ суть

- *эллипсоид* $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$, который является аффинным изображением проективной квадрики сигнатуры $(3, 1)$ в карте, бесконечная гиперплоскость которой не пересекает эту проективную квадрику; эллипсоид компактен и 0-планарен
- *двуполостный гиперболоид*, который $x_1^2 + x_2^2 = x_3^2 - 1$ является аффинным изображением той же проективной квадрики сигнатуры $(3, 1)$, но в карте, бесконечная гиперплоскость которой пересекает квадрику по непустой гладкой конике; двуполостный гиперболоид 0-планарен и имеет две связных компоненты

- *однополостный гиперболоид* $x_1^2 + x_2^2 = x_3^2 + 1$, который является аффинным изображением вещественной проективной квадрики Сегре[1] в карте, бесконечная гиперплоскость которой пересекает квадрику Сегре по непустой гладкой конике; однополостный гиперболоид заметается двумя семействами прямых

Кроме того, в $\mathbb{R}^3$ имеются два параболоида:

- *эллиптический параболоид* $x_1^2 + x_2^2 = x_3$ является аффинным изображением проективной квадрики сигнатуры $(3,1)$, которая касается бесконечно удалённой плоскости $x_0 = 0$ в точке $(0 : 0 : 1)$ и не имеет с ней никаких других точек пересечения; эллиптический параболоид 0-планарен

- *гиперболический параболоид* $x_1^2 - x_2^2 = x_3$ является аффинным изображением вещественной проективной квадрики Сегре в карте, которая касается бесконечно удалённой плоскости в точке $(0 : 0 : 1)$, пересекая её по паре прямых $x_1 = \pm x_2$; гиперболический параболоид выглядит как седло и заметается двумя семействами прямых

Остальные поверхности имеют вырожденное проективное замыкание. К ним относятся простые аффинные конусы над двумя различными гладкими вещественными прективными кониками:

- *двойная точка* $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$ (конус над пустой коникой)

- *эллиптический конус* $x_1^2 - x_2^2 = x_3^2$ (конус над непустой коникой)

а также цилиндры над семью кривыми второй степени в $\mathbb{R}^2$ из прим. 15.13, которые задаются ровно теми же уравнениями, но только в $\mathbb{R}^3$, а не в $\mathbb{R}^2$, и называются, соответственно, эллиптическим, гиперболическим и параболическим цилиндрами, парой параллельных плоскостей, двойной прямой, парой пересекающихся плоскостей и двойной плоскостью. Итого, в $\mathbb{R}^3$ имеется 14 аффинно неэквивалентных непустых аффинных квадрик.

[1]имеющей сигнатуру $(2,2)$

Упр. 15.1. Переход к другому базису заключается в линейной однородной замене координат, в результате которой многочлены остаются многочленами. Если поле $\Bbbk$ конечно, то пространство функций $V \to \Bbbk$ тоже конечно, а кольцо многочленов бесконечно. Поэтому над конечным полем гомоморфизм, сопоставляющий многочлену функцию, не инъективен. Над бесконечным полем ненулевой многочлен от n переменных не может тождественно обращаться в нуль во всех точках $\Bbbk^n$. Это устанавливается индукцией по $n = \dim V$. Ненулевой многочлен $f(x)$ от одной переменной имеет не более $\deg f$ корней. Многочлен от n переменных $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{\nu=0}^{d} \varphi_\nu(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) \cdot x_n^{d-\nu}$ является многочленом от одной переменной x_n с коэффициентами $\varphi_\nu \in \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_{n-1}]$. Вычисляя их в точке $p = (p_1, p_2, \dots, p_{n-1}) \in \Bbbk^{n-1}$, получаем многочлен от x_n с постоянными коэффициентами. Если он задаёт тождественно нулевую функцию на прямой $(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) = (p_1, p_2, \dots, p_{n-1})$, то все его коэффициенты нулевые. Если это происходит во всех точках $p \in \Bbbk^{n-1}$, то многочлены φ_ν оказываются тождественно нулевыми функциями на $\Bbbk^{n-1}$ и по индукции являются нулевыми многочленами.

Упр. 15.2. Надо показать, что образ отображения $\psi : V^* \to S^d V^*$, $\xi \mapsto \xi^d$, не содержится ни в какой гиперплоскости. Зафиксируем базис $x_1, x_2, \dots, x_n \in V^*$, выберем в качестве базиса в $S^d V^*$ многочлены $\frac{d!}{m_1! \dots m_n!} x_1^{m_1} x_2^{m_2} \cdots x_n^{m_n}$ и обозначим через $a_{m_1 m_2 \dots m_n}$ координаты относительно этого базиса. Тогда ψ переводит линейную форму $\sum \alpha_i x_i$ в многочлен с координатами $a_{m_1 m_2 \dots m_n} = \alpha_1^{m_1} \alpha_2^{m_2} \cdots \alpha_n^{m_n}$. Если образ отображения ψ содержится в гиперплоскости, заданной линейным уравнением $\sum\limits_{m_1 m_2 \dots m_n} A_{m_1 m_2 \dots m_n} a_{m_1 m_2 \dots m_n} = 0$, где $A_{m_1 m_2 \dots m_n} \in \Bbbk$, то тождественно по $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \Bbbk^n$ выполняется равенство $\sum\limits_{m_1 m_2 \dots m_n} A_{m_1 m_2 \dots m_n} \alpha_1^{m_1} \alpha_2^{m_2} \cdots \alpha_n^{m_n} = 0$. Поскольку поле $\Bbbk$ бесконечно, мы заключаем, что все коэффициенты $A_{m_1 m_2 \dots m_n}$ этого многочлена — нулевые. Что касается второго вопроса, то $6x_1^2 x_2 = (x_2 + x_1)^3 + (x_2 - x_1)^3 - 2x_2^3$ и аналогично для второго слагаемого.

Упр. 15.3. Зафиксируем в V какой-нибудь базис $e_1, e_2, \dots, e_n$, разложим v и w по этому базису как $v = \sum x_i e_i$ и $w = \sum y_i e_i$ и запишем q в виде (15-3). Тогда

$$q(v + w) - q(v) - q(w) = (x + y)B(x^t - y^t) - xBx^t - yBy^t = xBy^t + yBx^t = 2\, xBy^t\ .$$

(в последнем переходе мы воспользовались тем, что число yBx^t, будучи матрицей размера 1×1, совпадает со своей транспонированной версией, и в силу симметричности матрицы B равно $yBx^t = (yBx^t)^t = xB^t y^t = xBy^t$). Остальные утверждения проверяются аналогично.

Упр. 15.4. $\sigma_{f(e)}$ тождественно действует на $f(e)^\perp$ и переводит $f(e)$ в $-f(e) = f(-e)$. Композиция $f \circ \sigma_e \circ f^{-1}$ действует точно также, поскольку f^{-1} переводит $f(e)^\perp$ в $e^\perp$ в силу изометричности оператора f.

Упр. 15.7. Согласно прим. 15.1 на стр. 233, гиперболиность формы $x_1^2 + x_2^2$ равносильна тому, что -1 является квадратом в $\mathbb{F}_p$. Как мы видели в n° 3.5.2 на стр. 49, это происходит в точности при $p \equiv 1 \pmod 4$. Рассуждение про вторую форму аналогично.

Упр. 15.9. Поскольку $\tilde{q}(p, a) = 0$ для всех $a \in \mathbb{P}_n$, ограничение квадрики Q на любую прямую $(pa) \subset \mathbb{P}_n$ либо тождественно нулевое, либо вырожденное.

Упр. 15.10. Если прямая касается квадрики в точке b и пересекает её ещё в какой-нибудь точке $a \neq b$, то такая прямая целиком лежит на квадрике, поскольку матрица Грама векторов a, b тождественно нулевая. Поэтому, если точка p лежит в пересечении всех касательных пространств, то всякая проходящая через неё прямая либо больше уже нигде не пересекает квадрику, либо лежит на ней целиком. Это означает, что $p \in Q$ и все проходящие через p прямые касаются Q в точке p. Тем самым, $p \in \operatorname{Sing} Q$. Наоборот, любой элемент из $\ker \hat{q}$ лежит в пересечении $\bigcup\limits_{b \in \mathbb{P}_n} \operatorname{Ann} \hat{q}(b)$.

Упр. 15.11. Пусть σ переставляет между собою точки a_1 и a_2, а также точки b_1 и b_2. Прямые (A_1A_2) и (B_1, B_2), проходящие на $\mathbb{P}_2 = \mathbb{P}(S^2U^*)$ через точки $A_i = \{a_i, a_i\}$ и $B_i = \{b_i, b_i\}$ коники Веронезе, пересекаются в некоторой точке $F = \{f_1, f_2\} \in \mathbb{P}_2$. Пучок проходящих через точку F прямых задаёт на конике Веронезе инволюцию, переставляющую между собою пары точек P_1, P_2, коллинеарных точке F. Эта инволюция совпадает с σ, поскольку действует на четыре точки A_1, A_2, B_1, B_2 точно так же, как и σ. Её неподвижными точками являются точки $F_1 = \{f_1, f_1\}$ и $F_2 = \{f_2, f_2\}$, в которых пересекаются с коникой Веронезе две касательные, опущенные на неё из точки F.

Упр. 15.12. Коники на $\mathbb{P}_2 = \mathbb{P}(V)$, проходящие через заданную точку $p \in \mathbb{P}_2$, образуют в пространстве коник $\mathbb{P}_5 = \mathbb{P}(S^2V^*)$ гиперплоскость, задаваемую линейным по $q \in S^2V^*$ уравнением $q(p) = 0$. Первое утверждение вытекает из того, что любые 5 гиперплоскостей в $\mathbb{P}_5$ имеют непустое пересечение, третье утверждение — из того, что на гладкой конике нет 3 коллинеарных точек, второе — из того, что через пять точек можно провести не более одной гладкой коники, а коника проходящая через три коллинеарные точки содержит прямую, на которой эти точки лежат.

Упр. 15.13. Первое следует из того, что проективное пространство $\mathbb{P}(S^2V^*)$ квадрик на $\mathbb{P}_3 = \mathbb{P}(V)$ имеет размерность 9, и любые 9 гиперплоскостей в $\mathbb{P}_9$ имеют непустое пересечение. Второе — из того, что прямая, пересекающая квадрику в трёх различных точках, лежит на ней целиком. Третье — из того, что ни на одной из квадрик в $\mathbb{P}_3$, кроме гиперболической квадрики Сегре нет трёх попарно скрещивающихся прямых.

Упр. 15.14. Переход к другому реперу заключается в аффинной замене координат, которая представляет собой композицию параллельного переноса и линейного преобразования пространства V. От такой замены координат многочлен второй степени останется многочленом второй степени.