§11. Пространство с оператором

11.1. Классификация пространств с оператором. Пусть $\Bbbk$ — произвольное поле, V — конечномерное векторное пространство над $\Bbbk$, а $F : V \to V$ — $\Bbbk$-линейный эндоморфизм пространства V. Мы будем называть пару (F, V) *пространством с оператором* или просто *оператором* над $\Bbbk$. Линейное отображение $C : U_1 \to U_2$ между пространствами с операторами (F_1, U_1) и (F_2, U_2) называется *гомоморфизмом*, если $F_2 \circ C = C \circ F_1$. В этом случае говорят, что диаграмма

$$\begin{tikzcd} U_1 \arrow[r, "C"] & U_2 \\ U_1 \arrow[u, "F_1"] \arrow[r, "C"'] & U_2 \arrow[u, "F_2"'] \end{tikzcd}$$

коммутативна[1]. Если C — изоморфизм векторных пространств, операторы $F_1 : U_1 \to U_1$ и $F_2 : U_2 \to U_2$ называются *изоморфными* или *подобными*. В этой ситуации $F_2 = CF_1C^{-1}$, и говорят, что G получается из F *сопряжением* посредством C.

Подпространство $U \subset V$ называется F-*инвариантным*, если $F(U) \subset U$. В этом случае $(F|_U, U)$ тоже является пространством с оператором и вложение $U \hookrightarrow V$ является гомоморфизмом пространств с операторами. Оператор, не имеющий инвариантных подпространств, отличных от нуля и всего пространства, называется *неприводимым* или *простым*.

Упражнение 11.1. Покажите что оператор умножения на t в фактор кольце $\mathbb{R}[t]/\left(t^2+1\right)$ неприводим над $\mathbb{R}$.

Оператор $F : V \to V$ называется *разложимым*, если пространство V можно разложить в прямую сумму двух ненулевых F-инвариантных подпространств, и *неразложимым* — в противном случае. Все простые операторы неразложимы.

Упражнение 11.2. Покажите, что оператор умножения на t в фактор кольце $\Bbbk[t]/\left(t^n\right)$ неразложим (поле $\Bbbk$ произвольно) и приводим при $n > 1$.

Таким образом, над любым полем $\Bbbk$ имеются неразложимые пространства с оператором любой размерности. Очевидно, что всякое пространство с оператором является прямой суммой неразложимых.

Упражнение 11.3. Покажите, что двойственные операторы $F : V \to V$ и $F^* : V^* \to V^*$ либо оба разложимы, либо оба неразложимы.

11.1.1. Пространство с оператором как $\Bbbk[t]$-модуль. Задание линейного оператора $F : V \to V$ эквивалентно заданию на пространстве V структуры модуля над кольцом многочленов $\Bbbk[t]$. В самом деле, структура $\Bbbk[t]$-модуля включает в себя операцию умножения векторов на $t : v \mapsto tv$, которая является линейным отображением $V \to V$. Если обозначить его буквой F, то оператор умножения векторов на фиксированный многочлен $f(t) : v \mapsto f(t) \cdot v$ имеет вид $f(F) : V \to V$, т. е. представляет собой результат вычисления многочлена f на элементе F в $\Bbbk$-алгебре $\mathrm{End}(V)$. Наоборот, каждый линейный оператор $F : V \to V$ задаёт на V структуру $\Bbbk[t]$-модуля по формуле $f(t) \cdot v \overset{\text{def}}{=} f(F)v$. Мы будем обозначать этот модуль через V_F.

[1]произвольная диаграмма отображений называется *коммутативной*, если композиции отображений вдоль любых двух путей с общим началом и концом одинаковы

Гомоморфизм $\Bbbk[t]$-модулей $C : V_F \to W_G$, построенных по операторам $F : V \to V$ и $G : W \to W$ — это линейное отображение $C : V \to W$, перестановочное с умножением векторов на t, т. е. такое что $C \circ F = F \circ C$. Поэтому операторы F и G изоморфны тогда и только тогда, когда изоморфны $\Bbbk[t]$-модули V_F и W_G.

Векторное подпространство $U \subset V$ является $\Bbbk[t]$-подмодулем в модуле V_F, если и только если оператор умножения на t переводит U в себя, т. е. тогда и только тогда, когда это подпространство F-инвариантно. Аналогично, разложимость V в прямую сумму инвариантных подпространств означает разложимость $\Bbbk[t]$-модуля V_F в прямую сумму $\Bbbk[t]$-подмодулей.

Если векторное пространство V конечномерно над $\Bbbk$, то $\Bbbk[t]$-модуль V_F является конечно порождённым модулем кручения. В самом деле, любой базис V над $\Bbbk$ порождает V_F как модуль над $\Bbbk[t]$, и в каноническом разложении V_F в прямую сумму свободного модуля и модуля кручения[1] свободное слагаемое отсутствует, т. к. иначе V было бы бесконечномерно над $\Bbbk$. Из теоремы об элементарных делителях[2] вытекает

Теорема 11.1
Любой линейный оператор в конечномерном векторном пространстве над произвольным полем $\Bbbk$ подобен оператору умножения на t в прямой сумме фактор колец

$$\frac{\Bbbk[t]}{\big(p_1^{m_1}(t)\big)} \oplus \cdots \oplus \frac{\Bbbk[t]}{\big(p_k^{m_k}(t)\big)}\,, \tag{11-1}$$

где все многочлены $p_\nu(t) \in \Bbbk[t]$ приведены и неприводимы[3]. Каждое прямое слагаемое в этой сумме неразложимо. Операторы умножения на t, действующие в суммах

$$\frac{\Bbbk[t]}{\big(p_i^{m_1}(t)\big)} \oplus \cdots \oplus \frac{\Bbbk[t]}{\big(p_k^{m_k}(t)\big)} \quad \text{и} \quad \frac{\Bbbk[t]}{\big(q_i^{n_1}(t)\big)} \oplus \cdots \oplus \frac{\Bbbk[t]}{\big(q_\ell^{n_\ell}(t)\big)}$$

изоморфны тогда и только тогда, когда $k = \ell$, и прямые слагаемые можно переставить так, чтобы $p_\nu = q_\nu$ и $m_\nu = n_\nu$ при всех ν. □

Определение 11.1 (элементарные делители линейного оператора)
Дизъюнктное объединение[4] всех многочленов $p_\nu^{m_\nu}$, стоящих в правой части разложения (11-1), называется *набором элементарных делителей* оператора $F : V \to V$ и обозначается через $\mathcal{E}\ell(F)$.

Следствие 11.1
Линейные операторы F и G подобны тогда и только тогда, когда $\mathcal{E}\ell(F) = \mathcal{E}\ell(G)$. □

Следствие 11.2
Линейный оператор неразложим тогда и только тогда, когда он подобен оператору умножения на t в фактор кольце $\Bbbk[t]/\big(p^m\big)$, где $p \in \Bbbk[t]$ неприводим и приведён. Неразложимый оператор неприводим, если и только если $m = 1$. □

[1] см. сл. 10.1 на стр. 158
[2] см. теор. 10.4 на стр. 157
[3] и многочлены p_i и показатели m_j в (11-1) могут повторяться
[4] напомню, что каждый элементарный делитель p^m входит в него ровно столько раз, сколько прямых слагаемых вида $\Bbbk[t]/(p^m)$ входит в разложение V

Следствие 11.3
Многочлен $f \in \Bbbk[t]$ тогда и только тогда аннулирует оператор $F : V \to V$, когда он делится на все элементарные делители оператора F. $\square$

11.1.2. Нильпотентные операторы. Линейный оператор $F : V \to V$ называется *нильпотентным*, если $F^m = 0$ для некоторого $m \in \mathbb{N}$. Поскольку нильпотентный оператор аннулируется многочленом t^m, все его элементарные делители являются степенями t. Поэтому, согласно теор. 11.1, нильпотентный оператор изоморфен оператору умножения на t в прямой сумме фактор колец вида

$$\frac{\Bbbk[t]}{(t^{\nu_1})} \oplus \cdots \oplus \frac{\Bbbk[t]}{(t^{\nu_k})} \tag{11-2}$$

и два таких оператора изоморфны друг другу тогда и только тогда, когда выстроенные в порядке (нестрогого) убывания наборы показателей $\nu_1 \geqslant \nu_2 \geqslant \cdots \geqslant \nu_k$ у них одинаковы. Таким образом, нильпотентные операторы над произвольным полем $\Bbbk$ взаимно однозначно соответствуют диаграммам Юнга ν. Диаграмма $\nu(F)$, характеризующая нильпотентный оператор F, называется его *цикловым типом*.

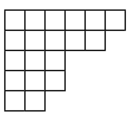
Действие умножения на t на базис пространства $\Bbbk[t] \,/\, \left(t^m\right)$, состоящий из классов $e_1 = [t^{m-1}]$, $e_2 = [t^{m-2}]$, … , $e_m = [1]$ по модулю t^m, происходит по правилу

$$0 \leftarrow\!\shortmid e_1 \leftarrow\!\shortmid e_2 \leftarrow\!\shortmid e_3 \leftarrow\!\shortmid \cdots \leftarrow\!\shortmid e_{m-1} \leftarrow\!\shortmid e_m$$

и задаётся матрицей, именуемой *нильпотентной жордановой клеткой* размера m :

$$J_m(0) \overset{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тем самым, для нильпотентного оператора F циклового типа $\nu(F)$ в пространстве V имеется базис, векторы которого размещаются по клеткам диаграммы $\nu(F)$ так, что F переводит каждый из них в левый соседний, а векторы самого левого столбца — в нуль:



$$\leftrightsquigarrow \quad \begin{array}{l} 0 \leftarrow \bullet \leftarrow \bullet \leftarrow \bullet \leftarrow \bullet \leftarrow \bullet \leftarrow \bullet \\ 0 \leftarrow \bullet \leftarrow \bullet \leftarrow \bullet \leftarrow \bullet \leftarrow \bullet \\ 0 \leftarrow \bullet \leftarrow \bullet \leftarrow \bullet \\ 0 \leftarrow \bullet \leftarrow \bullet \leftarrow \bullet \\ 0 \leftarrow \bullet \leftarrow \bullet \end{array} \tag{11-3}$$

Базис такого вида называется *циклическим* (или *жордановым*) базисом, а наборы базисных векторов, стоящие по строкам диаграммы, называются *жордановыми цепочками*. Так как сумма длин первых m столбцов диаграммы $\nu(F)$ равна $\dim\ker F^m$, длина m-того столбца диаграммы $\nu(F)$ равна

$$\nu_m^t(F) = \dim\ker F^m - \dim\ker F^{m-1}\,. \tag{11-4}$$

11.1.3. Полупростые операторы. Прямая сумма простых или, в другой терминологии, неприводимых пространств с операторами называется *полупростым* или *вполне приводимым* пространством с оператором. Полупростота в каком-то смысле «противоположна» нильпотентности и допускает несколько переформулировок.

Предложение 11.1
Следующие свойства оператора $F : V \to V$ эквивалентны друг другу:

1) пространство V является прямой суммой неприводимых F-инвариантных подпространств

2) пространство V линейно порождается неприводимыми F-инвариантными подпространствами

3) для любого ненулевого F-инвариантного подпространства $U \subsetneq V$ найдётся такое F-инвариантное подпространство $W \subset V$, что $V = U \oplus W$

4) оператор F подобен умножению на t в прямой сумме фактор колец

$$\Bbbk[t]/(p_1) \oplus \Bbbk[t]/(p_2) \oplus \cdots \oplus \Bbbk[t]/(p_r),$$

где $p_i \in \Bbbk[t]$ приведены и неприводимы[1] (но не обязательно различны).

Доказательство. Импликация (1) ⇒ (2) очевидна. Покажем, что (2) ⇒ (3). Индукция по $\dim V$. При $\dim V = 1$ доказывать нечего. Пусть $\dim V > 1$. Для каждого неприводимого F-инвариантного подпространства $L \subset V$ пересечение $L \cap U$, будучи F-инвариантным подпространством в L, либо нулевое, либо совпадает с L. Если все неприводимые инвариантные подпространства $L \subset V$ лежат в U, то $U = V$ в силу (2), и доказывать нечего. Если есть ненулевое неприводимое F-инвариантное подпространство $L \subset V$ с $L \cap U = 0$, рассмотрим фактор $V' = V/L$ и проекцию $\pi : V \twoheadrightarrow V'$ с ядром L. Она инъективно отображает подпространство $U \subset V$ на ненулевое F-инвариантное подпространство $\pi(U) \subset V'$. Поскольку $\dim V' < \dim V$, по индукции найдётся такое F-инвариантное подпространство $W' \subset V'$, что $V' = W' \oplus \pi(U)$ (при $\pi(U) = V$ мы полагаем $W' = 0$). Пусть $W = \pi^{-1}(W') \subset V$. Проверим, что $V = U + W$. Проекция любого $v \in V$ на V' представляется в виде $\pi(v) = \pi(u) + w'$ с $u \in U$, $w' \in W'$, и разность $w = v - u \in W$, поскольку $\pi(w) = \pi(v) - \pi(u) = w' \in W'$. Тем самым, $v = w + u$ с $w \in W$, $u \in U$. Если вектор $v \in U \cap W$, то $\pi(v) \in \pi(U) \cap W' = 0$, откуда $v \in \ker \pi = L$. Так как $L \cap U = 0$, мы заключаем, что $U \cap W = 0$ и $V = W \oplus U$.

Чтобы доказать импликацию (3) ⇒ (4), покажем сначала, что если свойство (3) выполнено для пространства V, то оно выполнено и для каждого F-инвариантного подпространства $H \subset V$. Рассмотрим любое инвариантное подпространство $U \subset H$ и отыщем в V такие инвариантные подпространства Q и R, что $V = H \oplus Q = U \oplus Q \oplus R$. Рассмотрим проекцию $\pi : V \twoheadrightarrow H$ с ядром Q и положим $W = \pi(R)$.

Упражнение 11.4. Проверьте, что $H = U \oplus W$.

Таким образом, если свойство (3) выполнено для прямой суммы фактор колец (11-1) из теор. 11.1, то оно выполнено и для каждого слагаемого этой суммы. Однако по сл. 11.2 при $m > 1$ пространство $\Bbbk[t]/(p^m)$ приводимо, но неразложимо.

Импликация (4) ⇒ (1) также немедленно вытекает из сл. 11.2. □

Следствие 11.4 (из доказательства предл. 11.1)
Ограничение полупростого оператора на инвариантное подпространство также является полупростым оператором.

[1] иными словами, в прямой сумме (11-1) из теор. 11.1 все показатели степеней $m_i = 1$

11.1.4. Характеристический многочлен. Пусть оператор $F : V \to V$ имеет матрицу F_v в каком либо базисе v пространства V. Характеристический многочлен $\det(tE - F_v)$ этой матрицы не меняется при переходе к любому другому базису $w = v\,C$, поскольку по форм. (8-13) на стр. 126 $F_w = C^{-1}F_vC$ и

$$\det\left(tE - F_w\right) = \det\left(tC^{-1}EC - C^{-1}F_vC\right) = \det\left(C^{-1}\left(tE - F_v\right)C\right) = \\ = \det C^{-1} \cdot \det\left(tE - F_v\right) \cdot \det C = \det\left(tE - F_v\right) .$$

Многочлен $\chi_F(t) \stackrel{\text{def}}{=} \det(tE - F_v)$ называется *характеристическим многочленом* оператора F. Предыдущее вычисление показывает, что подобные операторы имеют равные характеристические многочлены.

Упражнение 11.5. Пусть пространство с оператором (F, W) является прямой суммой пространств с операторами (G, U) и (H, V). Убедитесь, что $\chi_F(t) = \chi_G(t) \cdot \chi_H(t)$ в $\Bbbk[t]$.

Упражнение 11.6. Пусть $f \in \Bbbk[t]$ — любой приведённый многочлен. Убедитесь, что характеристический многочлен оператора умножения на t в фактор кольце $\Bbbk[t]/(f)$ равен f.

Из этих упражнений и теор. 11.1 мы получаем

Предложение 11.2
Характеристический многочлен равен произведению всех элементарных делителей. □

Упражнение 11.7. Выведите из предл. 11.2 новое доказательство теоремы Гамильтона–Кэли.

11.1.5. Минимальный многочлен. Для каждого неприводимого приведённого многочлена $p \in \Bbbk[t]$ обозначим через $m_p(F)$ максимальный показатель m, с которым p^m присутствует в наборе элементарных делителей оператора F, а для тех p, степени которых не представлены в $\mathcal{E}\ell\, F$, положим $m_p(F) = 0$. Таким образом, $m_p(F) = 0$ для всех p кроме конечного числа. Из теор. 11.1 вытекает, что приведённый многочлен $\mu_F(t)$ наименьшей возможной степени, аннулирующий оператор F, равен

$$\mu_F(t) = \prod_p p^{m_p(F)} ,$$

где произведение берётся по всем приведённым неприводимым $p \in \Bbbk[t]$. Многочлен $\mu_F(t)$ называется *минимальным многочленом* оператора F. Отметим, что минимальный многочлен делит характеристический.

11.1.6. Циклические векторы. Вектор $v \in V$ называется *циклическим вектором* линейного оператора $F : V \to V$, если его F-орбита v, Fv, F^2v, F^3v, , … линейно порождает пространство V над полем $\Bbbk$. Иначе можно сказать, что v порождает модуль V_F над $\Bbbk[t]$.

Предложение 11.3
Следующие свойства оператора $F : V \to V$ эквивалентны друг другу:

1) F обладает циклическим вектором
2) F подобен умножению на t в фактор кольце $\Bbbk[t]/(f)$, где $f \in \Bbbk[t]$ — какой-либо приведённый многочлен

3) каждый неприводимый $p \in \Bbbk[t]$ встречается в $\mathcal{E}\ell\, F$ не более одного раза

4) минимальный многочлен оператора F совпадает с характеристическим.

Доказательство. Условия (3) и (4) эквивалентны в силу предл. 11.2 и означают, что оператор F подобен умножению на t в прямой сумме фактор колец

$$\Bbbk[t]/\left(p_1^{m_1}\right) \oplus \Bbbk[t]/\left(p_2^{m_2}\right) \oplus \cdots \oplus \Bbbk[t]/\left(p_r^{m_r}\right) \,,$$

в которой все неприводимые приведённые многочлены $p_1, p_2, \dots, p_r$ попарно различны. По китайской теореме об остатках, эта сумма изоморфна $\Bbbk[t]/(f)$, где

$$f = \chi_F = \mu_F = \prod_{i=1}^{r} p_i^{m_i} \,.$$

Тем самым, (2) равносильно (3) и (4). Импликация (2) ⇒ (1) очевидна: в качестве циклического вектора для оператора умножения на t в фактор кольце $\Bbbk[t]/(f)$ можно взять $v = [1]$. Наоборот, если модуль V_F порождается над $\Bbbk[t]$ одним вектором v, то $V_F = \Bbbk[t]/R$, где $R = \ker \pi$ — ядро $\Bbbk[t]$-линейного эпиморфизма $\Bbbk[t] \twoheadrightarrow V_F$, преводящего 1 в v. Поскольку $\Bbbk[t]$ — кольцо главных идеалов, модмодуль $R \subset \Bbbk[t]$ имеет вид (f), где f-приведённый многочлен наименьшей степени со свойством $f(F)v = 0$. Тем самым, $V = \Bbbk[t]/(f)$. □

11.2. Собственные подпространства. Инвариантное для оператора $F : V \to V$ подпространство, на котором F действует как скалярное умножение на число $\lambda \in \Bbbk$, обозначается

$$V_\lambda \stackrel{\text{def}}{=} \{v \in V \mid F(v) = \lambda v\} = \ker(\lambda\, \mathrm{Id}_V - F)$$

и называется *собственным подпространством* оператора F. Ненулевые векторы $v \in V_\lambda$ называются *собственными векторами* оператора F с собственным числом λ.

Предложение 11.4
Любой набор собственных векторов с попарно различными собственными числами линейно независим.

Доказательство. Пусть собственные векторы $v_1, v_2, \dots, v_m$ имеют попарно разные собственные числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ и линейно зависимы. Рассмотрим зависимость, содержащую минимально возможное число векторов, и пусть это будут векторы $e_1, e_2, \dots, e_k$. Тогда $k \geqslant 2$ и $e_k = x_1e_1 + x_2e_2 + \cdots + x_{k-1}e_{k-1}$, где все $x_i \in \Bbbk$ отличны от нуля. При этом $\lambda_k e_k = F(e_k) = \sum x_i F(e_i) = \sum x_i \lambda_i e_i$. Вычитая из этого равенства предыдущее, умноженное на λ_k получаем более короткую линейную зависимость

$$0 = x_1(\lambda_1 - \lambda_k) \cdot e_1 + x_1(\lambda_1 - \lambda_k) \cdot e_2 + \cdots + x_{k-1}(\lambda_{k-1} - \lambda_k) \cdot e_{k-1}$$

с ненулевыми коэффициентами. □

Следствие 11.5
Сумма ненулевых собственных подпространств с разными собственными числами является прямой. □

11.2.1. Спектр. Все $\lambda \in \Bbbk$, для которых $V_\lambda \neq 0$, называются *собственными числами* (или *собственными значениями*) оператора F. Совокупность собственных чисел оператора $F : V \to V$ обозначается $\operatorname{Spec} F$ и называется *спектром* оператора F в поле $\Bbbk$. По сл. 11.5

$$\sum_{\lambda \in \operatorname{Spec} F} \dim V_\lambda \leqslant \dim V\,. \tag{11-5}$$

В частности, любой оператор $F : V \to V$ имеет не более $\dim V$ собственных чисел.

Упражнение 11.8. Покажите, что $\operatorname{Spec} F$ содержится в множестве корней любого многочлена, аннулирующего F.

Поскольку условие $\ker(\lambda \operatorname{Id}_V - F) \neq 0$ равносильно условию $\det(\lambda \operatorname{Id}_V - F) = 0$, спектр оператора F совпадает с множеством всех различных корней его характеристического многочлена $\chi_F(t) = \det(tE - F)$. В частности, справедливо

Предложение 11.5
Над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$ любой оператор обладает хотя бы одним ненулевым собственным подпространством. □

Упражнение 11.9. Покажите, что над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$ оператор F нильпотентен тогда и только тогда, когда когда $\operatorname{Spec} F = \{0\}$, и приведите пример оператора, для которого неравенство (11-5) строгое.

Если известен спектр F, отыскание собственных подпространств сводится к решению систем линейных однородных уравнений $(\lambda \operatorname{Id}_V - F)\,v = 0$, которые гарантированно имеют ненулевые решения при $\lambda \in \operatorname{Spec} F$.

11.2.2. Диагонализуемые операторы. Оператор $F : V \to V$ называется *диагонализуемым*, если в V имеется базис, в котором F записывается диагональной матрицей. Такой базис состоит из собственных векторов оператора F, а элементы диагональной матрицы суть собственные числа F, и каждое $\lambda \in \operatorname{Spec} F$ встречается на диагонали ровно столько раз, какова кратность корня $t = \lambda$ в характеристическом многочлене $\chi_F(t)$ и какова размерность собственного подпространства V_λ.

Иначе можно сказать, что диагонализуемый оператор F подобен оператору умножения на t в прямой сумме фактор колец $\Bbbk[t]/(t - \lambda) \simeq \Bbbk$, где λ пробегает $\operatorname{Spec} F$, и каждое прямое слагаемое представлено $\dim V_\lambda$ раз.

Предложение 11.6
Следующие свойства оператора $F : V \to V$ эквивалентны:

1) F диагонализуем

2) пространство V линейно порождается собственными векторами оператора F

3) характеристический многочлен $\chi_F(t) = \det(tE - F)$ полностью раскладывается в $\Bbbk[t]$ на линейные множители, и кратность каждого его корня λ равна размерности собственного подпространства V_λ

4) все элементарные делители F имеют вид $(t - \lambda)$, $\lambda \in \Bbbk$

5) оператор F аннулируется многочленом f, раскладывающимся в $\Bbbk[t]$ в произведение попарно различных линейных множителей.

Доказательство. Эквивалентности (2) $\iff$ (1) $\iff$ (4) и импликация (1) $\Rightarrow$ (3) очевидны. Эквивалентность (4) $\iff$ (5) следует из сл. 11.3. Из (3) вытекает, что $\sum \dim V_\lambda = \deg \chi_F = \dim V$. Поэтому прямая по сл. 11.5 сумма всех различных собственных подпространств V_λ совпадает с V, что даёт импликацию (3) $\Rightarrow$ (1). □

Следствие 11.6
Если оператор $F : V \to V$ диагонализуем, то его ограничение на любое инвариантное подпространство тоже диагонализуемо на этом подпространстве.

Доказательство. Это вытекает из свойства (5) предл. 11.6. □

Упражнение 11.10. Убедитесь, что над алгебраически замкнутым полем диагонализуемость равносильна полупростоте.

11.3. Аннулирующие многочлены. Если задан многочлен $f \in \Bbbk[x]$, аннулирующий линейный оператор[1] $F : V \to V$, и известно, как f раскладывается в $\Bbbk[t]$ на простые множители, то в силу сл. 11.3 это оставляет лишь конечное число возможностей для набора элементарных делителей $\mathcal{E}\ell(F)$ и часто позволяет явно описать разложение V в прямую сумму F-инвариантных подпространств во внутренних терминах действия F на пространстве V.

Пример 11.1 (инволюции)
Линейный оператор $\sigma : V \to V$ называется *инволюцией*, если он аннулируется многочленом $t^2 - 1$, т. е. удовлетворяет соотношению $\sigma^2 = \mathrm{Id}_V$. Тождественная инволюция $\sigma = \mathrm{Id}_V$ называется *тривиальной*. Так как $t^2 - 1 = (t+1)(t-1) = 0$ является произведением различных линейных множителей, все инволюции диагонализуемы. Пространство V с инволюцией σ распадается в прямую сумму собственных подпространств $V = V_+ \oplus V_-$ с собственными значениями ± 1, и любой вектор $v \in V$ однозначно представим в виде $v = v_+ + v_-$, где $v_+ = (v + Fv)/2 \in V_+ = \ker(\sigma - \mathrm{Id}_V) = \operatorname{im}(\sigma + \mathrm{Id}_V)$ и $v_- = (v - Fv)/2 \in V_- = \ker(\sigma + \mathrm{Id}_V) = \operatorname{im}(\sigma - \mathrm{Id}_V)$.

Предложение 11.7
Пусть оператор $F : V \to V$ аннулируется многочленом $q \in \Bbbk[t]$, раскладывающимся над полем $\Bbbk$ в произведение $q = q_1 \cdot q_2 \cdot \cdots \cdot q_r$ попарно взаимно простых многочленов $q_i \in \Bbbk[t]$. Положим $Q_j = q/q_j = \prod\limits_{\nu \neq j} q_\nu$. Тогда $\ker q_j(F) = \operatorname{im} Q_j(F)$ для каждого j, все эти подпространства F-инвариантны, и пространство V является прямой суммой тех из них, что отличны от нуля.

Доказательство. Поскольку $q(F) = q_j(F) \circ Q_j(F) = 0$, имеется включение

$$\operatorname{im} Q_j(F) \subset \ker q_j(F)\,.$$

Из взаимной простоты $q_i(t)$ и $Q_i(t)$ вытекает, что сумма ядер $\ker q_i(F)$ прямая:

$$\ker q_i(F) \cap \sum_{j \neq i} \ker q_j(F) = 0\,.$$

[1] в силу тождества Гамильтона – Кэли по крайней мере один такой многочлен, а именно $\chi_F(t) = \det(tE - F)$, всегда можно предъявить явно

Действительно, подберём такие многочлены $g(t)$ и $h(t)$, что $1 = g(t)q_i(t) + h(t)Q_i(t)$, подставим в это равенство $t = F$ и применим оператор $E = g(F) \circ q_i(F) + h(F) \circ Q_j(F)$ к любому вектору $v \in \ker q_i(F) \cap \sum\limits_{j \neq i} \ker q_j$. Так как $\ker Q_j(F)$ содержит все $\ker q_j(F)$ с $j \neq i$, получим

$$v = Ev = g(F) \circ q_i(F)v + h(F) \circ Q_j(F)v = 0\,.$$

Наконец, из взаимной простоты многочленов $Q_1, Q_2, \dots, Q_r$ вытекает, что V линейно порождается образами $\operatorname{im} Q_j(F)$: подберём $h_1, h_2, \dots, h_r \in \Bbbk[t]$ так, что $\sum Q_j(t) \cdot h_j(t) = 1$, подставим в это равенство $t = F$ и применим обе части к любому вектору $v \in V$. Получим $v = Ev = \sum Q_j(F)h_j(F)v \in \sum \operatorname{im} Q_j(F)$. □

Пример 11.2 (проекторы)
Линейный оператор $\pi : V \to V$ называется *идемпотентом* или *проектором*, если он аннулируется многочленом $t^2 - t = t(t-1)$, т. е. удовлетворяет соотношению $\pi^2 = \pi$. По предл. 11.7 образ любого идемпотента $\pi : V \to V$ совпадает с подпространством его неподвижных векторов:

$$\operatorname{im}\pi = \ker(\pi - \mathrm{Id}_V) = \{v \mid \pi(v) = v\}\,,$$

и $V = \ker\pi \oplus \operatorname{im}\pi$, так что π проектирует V на $\operatorname{im}\pi$ вдоль $\ker\pi$. Отметим, что оператор $\mathrm{Id}_V - \pi$ тоже является идемпотентом и проектирует V на $\ker\pi$ вдоль $\operatorname{im}\pi$. Таким образом, задание прямого разложения $V = U \oplus W$ равносильно заданию пары идемпотентных эндоморфизмов пространства V: проектора $\pi_U : V \twoheadrightarrow U$ вдоль W и проектора $\pi_W : V \twoheadrightarrow U$ вдоль W, связанных соотношениями $\pi_U + \pi_W = 1$ и $\pi_U\pi_W = \pi_W\pi_U = 0$.

Предложение 11.8
Над полем вещественных чисел $\mathbb{R}$ любой оператор обладает одномерным или двумерным инвариантным подпространством.

Доказательство. Пусть $\chi_F = q_1 q_2 \,\dots\, q_m$, где $q_i \in \mathbb{R}[t]$ — неприводимые приведённые линейные или квадратичные многочлены, не обязательно различные. Применим нулевой оператор $0 = q_1(F) \circ q_2(F) \circ \,\cdots\, \circ q_m(F)$ к какому-нибудь ненулевому вектору $v \in V$. Тогда при некотором $i \geqslant 0$ мы получим такой ненулевой вектор $w = q_{i+1}(F) \circ \,\cdots\, \circ q_m(F)\,v$, что $q_i(F)\,w = 0$. Если $q_i(t) = t - \lambda$ линеен, то $F(w) = \lambda w$, и мы имеем 1-мерное F-инвариантное подпространство $\Bbbk \cdot w$. Если $q_i(t) = t^2 - \alpha t - \beta$ квадратичен, то $F(Fw) = \alpha F(w) + \beta w$ лежит в линейной оболочке векторов w и Fw, которая тем самым является F-инвариантным подпространством, и её размерность не превышает 2. □

11.4. Разложение Жордана. Всюду в этом разделе мы считаем, что основное поле $\Bbbk$ алгебраически замкнуто. В этом случае неприводимые многочлены в $\Bbbk[t]$ исчерпываются линейными двучленами $(t - \lambda)$, и по теор. 11.1 каждый оператор $F : V \to V$ подобен оператору умножения на t в прямой сумме фактор колец

$$\frac{\Bbbk[t]}{\big((t-\lambda_1)^{m_1}\big)} \oplus \cdots \oplus \frac{\Bbbk[t]}{\big((t-\lambda_s)^{m_s}\big)}\,, \tag{11-6}$$

причём операторы умножения на t в прямых суммах

$$\frac{\Bbbk[t]}{\big((t-\nu_1)^{n_1}\big)} \oplus \cdots \oplus \frac{\Bbbk[t]}{\big((t-\nu_r)^{n_r}\big)} \quad \text{и} \quad \frac{\Bbbk[t]}{\big((t-\mu_1)^{m_1}\big)} \oplus \cdots \oplus \frac{\Bbbk[t]}{\big((t-\mu_s)^{m_s}\big)}$$

подобны , если и только если $r = s$ и прямые слагаемые можно перенумеровать так, чтобы $\mu_i = \nu_i$ и $m_i = n_i$ при всех i. В фактор кольце $\Bbbk[t]/\big((t-\lambda)^m\big)$ оператор умножения на $t = \lambda + (t-\lambda)$ является суммой скалярного оператора $\lambda E : f \mapsto \lambda f$ и нильпотентного оператора $\eta : f \mapsto (t-\lambda)\cdot f$, для которого многочлены $(t-\lambda)^{m-1}$, $(t-\lambda)^{m-2}$, … , $(t-\lambda)$, 1 образуют жорданову цепочку длины m. В базисе из этих многочленов умножение на t задаётся двудиагональной $m\times m$-матрицей

$$J_m(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & \\ & \lambda & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda & 1 \\ & & & & \lambda \end{pmatrix} \tag{11-7}$$

в остальных местах которой стоят нули. Эта матрица называется *жордановой клеткой* размера m с собственным числом λ.

Следствие 11.7 (жорданова нормальная форма)
Над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$ для любого оператора $F : V \to V$ в V существует базис, в котором матрица F имеет блочный вид

$$\begin{pmatrix} J_{m_1}(\lambda_1) & & & \\ & J_{m_2}(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{m_k}(\lambda_k) \end{pmatrix} \tag{11-8}$$

по главной диагонали которого стоят жордановы клетки[1] $J_{m_1}(\lambda_1)$, $J_{m_2}(\lambda_2)$ … , $J_{m_k}(\lambda_k)$ вида (11-7), а в остальных местах — нули. С точностью до перестановки блоков матрица (11-8) не зависит от выбора такого базиса. Два оператора подобны тогда и только тогда, когда их матрицы (11-8) отличаются друг от друга перестановкой блоков. □

Определение 11.2
Матрица (11-8) называется *жордановой нормальной формой* оператора F. Всякий базис пространства V, в котором матрица оператора F имеет жорданову нормальную форму, называется *жордановым базисом* оператора F .

11.4.1. Корневое разложение. Для произвольного оператора $F : V \to V$ подмодуль $(t-\lambda)$-кручения в модуле V_F называется *корневым подпространством* оператора F, отвечающим собственному $\lambda \in \operatorname{Spec} F$ и обозначается

$$K_\lambda = \{v \in V \mid \exists\, m \in \mathbb{N} : (\lambda \operatorname{Id} - F)^m v = 0\} = \bigcup_{m\geqslant 1} \ker(\lambda \operatorname{Id} - F)^m = \ker(\lambda \operatorname{Id} - F)^{m_\lambda}\,, \tag{11-9}$$

где m_λ — максимальный из показателей степеней элементарных делителей F вида $(t-\lambda)^m$. Каждое корневое подпространство K_λ содержит ненулевое собственное подпространство V_λ и тем самым отлично от нуля. Разложение $\Bbbk[t]$-модуля V_F в прямую сумму $\Bbbk[t]$-

[1] ещё раз отметим, что числа λ_i и m_i могут повторяться

подмодулей $(t-\lambda)$-кручения из сл. 10.2 на стр. 159 имеет вид $V = \bigoplus_{\lambda \in \operatorname{Spec} F} K_\lambda$ и называется *корневым разложением* оператора F.

Упражнение 11.11. Получите корневое разложение как следствие предл. 11.7 и тождества Гамильтона – Кэли без использования сл. 10.2 и теоремы об элементарных делителях.

Количество жордановых клеток размера m с заданным собственным значением λ в жордановой нормальной форме оператора F равно количеству строк длины m в диаграмме Юнга ν нильпотентного оператора $(\lambda \operatorname{Id} - F)|_{K_\lambda} : K_\lambda \to K_\lambda$. Согласно форм. (11-4) на стр. 163 длина k-того столбца этой диаграммы равна

$$\nu_k^t = \dim \ker(\lambda \operatorname{Id} - F)^k - \dim \ker(\lambda \operatorname{Id} - F)^{k-1}\,. \tag{11-10}$$

Таким образом, для отыскания жордановой нормальной формы оператора F достаточно разложить характеристический многочлен $\chi_F(t)$ на множители (??) и для каждого корня λ и натурального k в пределах $1 \leqslant k \leqslant m_\lambda$ вычислить $\dim \ker(\lambda \operatorname{Id} - F)^k$, после чего построить диаграмму Юнга ν с длинами столбцов (11-10) и написать столько клеток $J_\ell(\lambda)$, сколько строк длины ℓ имеется в диаграмме ν.

11.4.2. Перестановочные операторы. Если линейные операторы $F, G : V \to V$ на векторном пространстве V над произвольным полем $\Bbbk$ коммутируют друг с другом: $FG = GF$, то ядро и образ любого многочлена от оператора F переводятся оператором G в себя, т. к. $f(F)\,v = 0 \;\Rightarrow\; f(F)G\,v = Gf(F)\,v = 0$ и $v = f(F)\,w \;\Rightarrow\; Gv = Gf(F)\,w = f(F)G\,w$. В частности, собственные подпространства $V_\lambda = \ker(F - \lambda E)$ и корневые подпространства $K_\lambda = \bigcup_n \ker(\lambda \operatorname{Id} - F)^n$ оператора F инвариантны относительно любого оператора G, перестановочного с F.

Лемма 11.1
Над алгебраически замкнутым полем любое множество коммутирующих операторов обладает общим собственным вектором. Над произвольным полем любое множество диагонализуемых коммутирующих операторов может быть диагонализовано одновременно в одном общем базисе.

Доказательство. Индукция по размерности пространства. Если она равна единице или если все операторы скалярны, то доказывать нечего — подойдут любой ненулевой вектор и, соответственно, любой базис. Если среди операторов есть нескалярный, то его собственные подпространства имеют меньшую размерность и инвариантны для всех операторов, причём если операторы были диагонализуемы во всём пространстве, то их ограничения на инвариантные подпространства будут диагонализуемы на этих подпространствах (см. сл. 11.6). Применяя к собственным подпространствам предположение индукции, получаем требуемое. □

Теорема 11.2 (разложение Жордана)
Над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$ для каждого оператора F существует единственная пара операторов F_s и F_n, таких что F_n нильпотентен, F_s диагонализуем, $F = F_s + F_n$ и $F_sF_n = F_nF_s$. Кроме того, операторы F_s и F_n являются многочленами с нулевым свободным членом от оператора F.

Доказательство. Представим F оператором умножения на t в прямой сумме фактор колец

$$\frac{\Bbbk[t]}{\big((t-\lambda_1)^{m_1}\big)} \oplus \cdots \oplus \frac{\Bbbk[t]}{\big((t-\lambda_s)^{m_s}\big)}\,, \tag{11-11}$$

и пусть[1] $\operatorname{Spec} F = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r\}$. Для каждого $i = 1, 2, \dots, r$ зафиксируем $a_i \in \mathbb{N}$, строго большее максимального показателя m_{λ_i}, с которыми $(t-\lambda_i)$ встречается в (11-11). По китайской теореме об остатках существуют многочлены $f_1, f_2, \dots, f_r \in \Bbbk[t]$, такие что

$$f_\nu(t) \equiv \begin{cases} 1 \mod \big(t-\lambda_\nu\big)^{a_\nu} \\ 0 \mod \big(t-\lambda_\mu\big)^{a_\mu} \text{ при } \mu \neq \nu\,. \end{cases}$$

Если $\lambda_\nu \neq 0$, многочлен t обратим по модулю $(t-\lambda_\nu)^{a_\nu}$, и найдётся многочлен $g_\nu(t)$, такой что $t \cdot g_\nu(t) \equiv \lambda_\nu \mod \big(t-\lambda_\nu\big)^{a_\nu}$. Для $\lambda_\nu = 0$, положим $g_\nu = 0$. Тогда при всех ν многочлен

$$p_s(t) \overset{\text{def}}{=} t\sum_{\nu=1}^{r} g_\nu(t) f_\nu(t) \equiv \lambda_\nu \mod \big(t-\lambda_\nu\big)^{a_\nu}$$

и не имеет свободного члена. Поэтому умножение на $p_s(t)$ действует на каждом факторе $\Bbbk[t]/\big((t-\lambda_\nu)^m\big)$ из разложения (11-11) как умножение на λ_ν. Тем самым, оператор $F_s = p_s(F)$ диагонализуем. Оператор $F_n = F - F_s$ действует на $\Bbbk[t]/\big((t-\lambda_\nu)^m\big)$ умножением на $t-\lambda_\nu$ и, значит, нильпотентен. Будучи многочленами от F, операторы F_s и F_n перестановочны между собою и с F. Это доказывает существование операторов F_s, F_n и последнее утверждение.

Докажем единственность. Пусть есть ещё одно разложение $F = F_s' + F_n'$, удовлетворяющее условиям теоремы. Поскольку F_s' и F_n' перестановочны между собой, они перестановочны с $F = F_s' + F_n'$, а значит, и с построенными выше многочленами F_s, F_n от F. Поэтому каждое собственное подпространство V_λ оператора F_s переводится оператором F_s' в себя, и F_s' диагонализуем на V_λ. Если бы F_s' имел на V_λ собственный вектор v с собственным значением $\mu \neq \lambda$, то вектор v был собственным для оператора $F_n - F_n' = F_s - F_s'$ с ненулевым собственным числом $\lambda - \mu$, что невозможно, т. к. $F_n - F_n'$ нильпотентен.

Упражнение 11.12. Докажите это.

Следовательно $F_s'|_{V_\lambda} = \lambda \mathrm{Id}$, откуда $F_s' = F_s$ и $F_n' = F - F_s' = F - F_s = F_n$. □

Определение 11.3
Операторы F_s и F_n из теор. 11.2 называются, соответственно, *полупростой*[2] (или *диагонализуемой*) и *нильпотентной* составляющими оператора F.

Упражнение 11.13. Покажите, что если оператор $F : V \to V$ переводит некоторое подпространство $U \subset V$ в некоторое подпространство $W \subset V$, то его жордановы компоненты F_s, и F_n тоже переводят U в W.

[1] напомню, что $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ это множество всех различных $\lambda_i \in \Bbbk$, встречающихся в (11-11)
[2] индекс «s» в обозначении F_s происходит от английского *semisimple*

11.5. Функции от оператора. Пусть основное поле $\Bbbk = \mathbb{C}$ и оператор F умножения на t в прямой сумме фактор колец

$$W = \frac{\mathbb{C}[t]}{\big((t-\lambda_1)^{s_1}\big)} \oplus \cdots \oplus \frac{\mathbb{C}[t]}{\big((t-\lambda_r)^{s_r}\big)} \tag{11-12}$$

имеет спектр[1] $\operatorname{Spec} F = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r\}$ и минимальный многочлен $\mu_F = \prod\limits_{\lambda \in \operatorname{Spec} F} (t-\lambda)^{m_\lambda}$.

Назовём подалгебру $\mathcal{C}$ в алгебре всех функций $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *пригодной для вычисления* на операторе F, если $\mathcal{C}$ содержит алгебру многочленов и любая функция $f \in \mathcal{C}$ допускает при каждом $\lambda \in \operatorname{Spec} F$ представление в виде

$$f(z) = f(\lambda) + \frac{f'(\lambda)}{1!}(z-\lambda) + \cdots + \frac{f^{(m_\lambda - 1)}(\lambda)}{(m_\lambda - 1)!}(z-\lambda)^{m_\lambda - 1} + g_\lambda(z)\cdot(z-\lambda)^{m_\lambda}, \tag{11-13}$$

где $g_\lambda \in \mathcal{C}$, а $f^{(k)} = \frac{d^k f}{dz^k}$ означает k-тую производную. В теор. 11.3 мы покажем, что существует единственный гомоморфизм алгебр

$$\mathrm{ev}_F : \mathcal{C} \to \operatorname{End}(W),$$

продолжающий гомоморфизм вычисления значений многочленов на операторе F на любую пригодную к вычислению на F алгебру функций $\mathcal{C} \supset \mathbb{C}[z]$. Для каждого подобного F оператора $G = CFC^{-1} : U \to U$ на любом пространстве U, связанным с W изоморфизмом $C : W \xrightarrow{\sim} U$, положим по определению $\mathrm{ev}_G = \mathrm{ev}_{CFC^{-1}} : f \mapsto C \circ \mathrm{ev}_F(f) \circ C^{-1}$.

Пример 11.3

Примером алгебры, пригодной для вычисления на данном операторе F, является алгебра $\mathcal{C}$ всех функций $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, которые раскладываются в круговой окрестности каждой точки $\lambda \in \operatorname{Spec} F$ в абсолютно сходящийся в этой окрестности ряд Тейлора. Тем самым, любой линейный оператор $G : V \to V$ можно подставить в любую функцию $f \in \mathcal{C}$. Например, для любого оператора F, спектр которого не содержит чисел вида $2\pi i k$, $k \in \mathbb{Z}$, определён оператор $\operatorname{th}(F)$. А если функция $f(z)$ является суммой степенного ряда, сходящегося всюду в $\mathbb{C}$, то оператор $f(F)$ определён вообще для каждого линейного оператора $F : V \to V$ на любом конечномерном векторном пространстве V. В частности, для всех операторов F определены операторы e^F, $\sin F$, $\operatorname{ch} F$ и т. п.

Теорема 11.3

Пусть алгебра $\mathcal{C} \supset \mathbb{C}[z]$ пригодна для вычисления на операторе $F : W \to W$ умножения на t в прямой сумме (11-12). Тогда вычисление $\mathrm{ev}_F : \mathbb{C}[z] \to \operatorname{End} W$ допускает единственное продолжение до гомоморфизма алгебр $\mathrm{ev}_F : \mathcal{C} \to \operatorname{End} W$. При этом $\forall\, f \in \mathcal{C}$

$$\mathrm{ev}_F(f) = P_{f,F}(F),$$

где $P_{f,F}(z) \in \mathbb{C}[z]$ — многочлен, значение которого в каждой точке $\lambda \in \operatorname{Spec} F$ вместе со значениями начальных $m_\lambda - 1$ производных те же, что у функции f:

$$P^{(k)}_{f,F}(\lambda) = f^{(k)}(\lambda) \quad \text{при всех } 0 \leqslant k \leqslant m_\lambda - 1\,.$$

(такой многочлен $P_{f,F}$ единствен по модулю минимального многочлена μ_F оператора F).

[1]ещё раз напомню, что $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r \in \mathbb{C}$ это все различные числа, присутствующие в (11-12), а $m_\lambda = m_{t-\lambda}(F)$ это максимальный показатель, встречающийся в (11-12) у элементарных делителей вида $(t-\lambda)^m$

Доказательство. Пусть искомое продолжение ev_F на алгебру $\mathcal{C}$ существует. Зафиксируем произвольную функцию $f \in \mathcal{C}$ и подставим $z = F$ в соотношение (11-13). Получим

$$f(F) = f(\lambda)\cdot E + f'(\lambda)\cdot(F-\lambda E) + \dots + \frac{1}{(m_\lambda - 1)!} f^{(m_\lambda - 1)}(\lambda)(F-\lambda E)^{m_\lambda - 1} + g_\lambda(F)(F-\lambda E)^{m_\lambda}. \quad (11\text{-}14)$$

Поскольку $(F - \lambda E)^m$ действует на прямой сумме фактор колец

$$W = \frac{\mathbb{C}[t]}{\big((t-\lambda_1)^{s_1}\big)} \oplus \dots \oplus \frac{\mathbb{C}[t]}{\big((t-\lambda_r)^{s_r}\big)}$$

умножением на $(t-\lambda)^m$, последнее слагаемое в (11-14) аннулирует подмодуль $(t-\lambda)$-кручения[1]. Мы заключаем, что для каждого $\lambda \in \mathrm{Spec}(F)$ оператор $f(F)$ переводит подмодуль $(t-\lambda)$-кручения в себя и действует на нём как оператор умножения на многочлен

$$f(\lambda) + f'(\lambda)\cdot(t-\lambda) + \dots + f^{(m_\lambda - 1)}(\lambda)\cdot(t-\lambda)^{m_\lambda - 1}/(m_\lambda - 1)! \quad (11\text{-}15)$$

По китайской теореме об остатках существует единственный класс $[P_{f,F}] \in \Bbbk[t]/\big(\mu_F\big)$ сравнимый с многочленом (11-15) по модулю $(t-\lambda)^{m_\lambda}$ сразу для всех $\lambda \in \mathrm{Spec}\,F$, и действие оператора $f(F)$ на всём пространстве W совпадает с действием оператора $P_{f,F}(F)$. Это доказывает единственность продолжения и последнее утверждение теоремы.

Проверим теперь, что правило $f(F) \stackrel{\text{def}}{=} P_{f,F}(F)$ действительно задаёт гомоморфизм алгебр $\mathcal{C} \to \mathrm{End}\,W$. Обозначим через $s^m_\lambda : \mathcal{C} \to \mathbb{C}[t]/\big((t-\lambda)^m\big)$ отображение, сопоставляющее функции $f \in \mathcal{C}$ её $(m-1)$-*ю струю* в точке $\lambda \in \mathbb{C}$:

$$s^m_\lambda f \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{k!} f^{(k)}(\lambda)\,(t-\lambda)^k \mod (t-\lambda)^m$$

и рассмотрим прямое произведение таких отображений по всем точкам $\lambda \in \mathrm{Spec}\,F$:

$$\begin{aligned} s : \mathcal{C} &\to \prod_{\lambda\in\mathrm{Spec}\,F} \mathbb{C}[t]/\big((t-\lambda)^{m_\lambda}\big) \simeq \mathbb{C}[t]/\big(\mu_F\big) \\ f &\mapsto \left(s^{m_{\lambda_1}-1}_{\lambda_1} f, \dots, s^{m_{\lambda_r}-1}_{\lambda_r} f\right). \end{aligned} \quad (11\text{-}16)$$

Упражнение 11.14. Проверьте, что отображение (11-16) является гомоморфизмом алгебр.

Композиция гомоморфизма (11-16) с гомоморфизмом $\mathrm{ev}_F : \mathbb{C}[t]/\big(\mu_F\big) \to \mathrm{End}\,W$ и является искомым гомомрфизмом вычисления. □

11.5.1. Интерполяционный многочлен. Многочлен $P_{f,F} \in \mathbb{C}[z]$ значение которого на операторе $F : V \to V$ равно значению функции $f \in \mathcal{C}$ на этом операторе, называется *интерполяционным многочленом* для вычисления $f(F)$. Он зависит как от функции f, так и от оператора[2] F и определён однозначно по модулю минимального многочлена μ_F оператора F. Если известно разложение характеристического многочлена оператора F в

[1] т. е. все слагаемые вида $\mathbb{C}[t]/\big((t-\lambda)^k\big)$

[2] в частности, значения $f(F) = P_{f,F}(F)$ и $f(G) = P_{f,G}(G)$ одной и той же функции f на разных операторах F и G получаются подстановкой этих операторов в *разные* интерполяционные многочлены $P_{f,F} \not\equiv P_{f,G} \mod \big(\mu_F\big)$

произведение степеней различных линейных двучленов: $\chi_F = \prod_{\lambda \in \operatorname{Spec} F} (t-\lambda)^{N_\lambda}$, то в качестве $P_{f,F}$ годится единственный многочлен степени $\deg P_{f,F} < \deg \chi_F = \dim V$, имеющий $P^{(k)}_{f,F}(\lambda) = f^{(k)}(\lambda)$ для каждого $\lambda \in \operatorname{Spec} F$ при всех $0 \leqslant k \leqslant N_\lambda - 1$. Действительно, так как число N_λ, равное сумме показателей всех элементарных делителей $(t-\lambda)^m \in \mathcal{E}\ell\, F$, не меньше числа m_λ, равного максимальному из этих показателей, класс этого многочлена удовлетворяет условиям теор. 11.3.

Пример 11.4 (степенная функция и рекуррентные уравнения)
Задачу отыскания n-того члена числовой последовательности $z_n \in \mathbb{C}$, удовлетворяющей рекуррентному уравнению m-того порядка $z_n = \alpha_1 z_{n-1} + \alpha_2 z_{n-2} + \dots + \alpha_m z_{n-m}$, если заданы её начальные m членов $(a_0, a_1, \dots, a_{m-1})$, сводится к задаче вычисления n-той степени $m \times m$-матрицы

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \alpha_m \\ 1 & 0 & \ddots & 0 & \alpha_{m-1} \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \alpha_2 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \alpha_1 \end{pmatrix}$$

поскольку умножение фрагмента из m идущих подряд членов последовательности z_n справа на матрицу S приводит к сдвигу этого фрагмента на единицу вправо:

$$(z_{k+1}, z_{k+2}, \dots, z_{k+m}) \cdot S = (z_{k+2}, z_{k+3}, \dots, z_{k+m+1}).$$

Таким образом, n-тый член последовательности z_n равен первой координате вектора

$$(a_0, a_1, \dots, a_{m-1}) \cdot S^n = (z_n, z_{n+1}, \dots, z_{n+m-1}).$$

Согласно теор. 11.3 $S^n = P_{f,F}(S)$, где $P_{f,S} \in \mathbb{C}[z]$ — интерполяционный многочлен для вычисления функции $f(z) = z^n$ на матрице S.

Проиллюстрируем сказанное на примере матрицы $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, задающей сдвиг в последовательности Фиббоначчи[1], которая определяется уравнением $z_n = z_{n-1} + z_{n-2}$. Корни характеристического многочлена

$$\chi_S(t) = \det \begin{pmatrix} t & -1 \\ -1 & t-1 \end{pmatrix} = t^2 - t - 1 = (t-\lambda_+)(t-\lambda_-)$$

суть $\lambda_\pm = (1 \pm \sqrt{5})/2$. Значения функции $f(z) = z^n$ на них суть $f\left(\lambda_\pm\right) = \lambda_\pm^n$. Коэффициенты интерполяционного многочлена $P_{f,S}(t) = at + b$ находятся из уравнений

$$\begin{cases} a\,\lambda_+ + b = \lambda_+^n \\ a\,\lambda_- + b = \lambda_-^n. \end{cases}$$

и равны $a = \left(\lambda_+^n - \lambda_-^n\right)/\left(\lambda_+ - \lambda_-\right)$, $b = \lambda_+^n - a\,\lambda_+ = \left(\lambda_+^{n-1} - \lambda_-^{n-1}\right)/\left(\lambda_+ - \lambda_-\right)$. Таким образом,

$$S^n = aS + bE = \begin{pmatrix} b & a \\ a & a+b \end{pmatrix}$$

[1]сравните это вычисление с проделанным ранее в n° 4.3.1 на стр. 54

Для классического начала $z_0 = 0$, $z_1 = 1$ получаем $\big(z_n, z_{n+1}\big) = (0,1)\cdot S^n = (a, a+b)$, т. е.

$$z_n = a = \frac{\Big((1+\sqrt{5})/2\Big)^n - \Big((1-\sqrt{5})/2\Big)^n}{\sqrt{5}}\,.$$

Отметим, что знание матрицы S^n позволяет без дополнительных вычислений находить n-тый член последовательности, удовлетворяющей тому же рекуррентному уравнению, но имеющей другое начало.

Предложение 11.9
Спектр оператора $f(F)$ состоит из чисел $f(\lambda)$ с $\lambda \in \operatorname{Spec} F$. Если $f'(\lambda) \neq 0$, то элементарные делители $(t-\lambda)^m \in \mathcal{E}\ell(F)$ биективно соответствуют элементарным делителям $\big(t - f(\lambda)\big)^m \in \mathcal{E}\ell\big(f(F)\big)$ оператора $f(F)$. Если $f'(\lambda) = 0$, то элементарные делители вида $(t-\lambda)^m \in \mathcal{E}\ell(F)$, имеющие $m > 1$, распадаются в объединения элементарных делителей $\big(t - f(\lambda)\big)^\ell \in \mathcal{E}\ell\big(f(F)\big)$, имеющих $\ell < m$.

Доказательство. Из доказательства теор. 11.3 вытекает, что диагональная и нильпотентная составляющие ограничения оператора $f(F)$ на подмодуль $(t-\lambda)$-кручения равны, соответственно, $f_s(F) = f(\lambda)\cdot \mathrm{Id}$ и $f_n(F) = f'(\lambda)\cdot\eta + \frac{1}{2}\,f''(\lambda)\cdot\eta^2 + \,\cdots$, где через η обозначен нильпотентный оператор умножения на $(t-\lambda)$. На каждом слагаемом $\mathbb{C}[t]/\big((t-\lambda)^k\big)$ оператор η имеет ровно одну жорданову цепочку максимальной длины k. Если $f'(\lambda) \neq 0$, то $f_n^{k-1}(F) = f'(\lambda)^{m-1}\cdot\eta^{k-1} \neq 0$. Поэтому $f_n(F)$ тоже имеет ровно одну жорданову цепочку длины k. При $f'(l) = 0$ и $m > 1$ равенство $f_n^m(F) = 0$ наступит при $m < k$, так что цикловой тип N будет состоять из нескольких жордановых цепочек. □

11.5.2. Аналитический подход к распространению гомоморфизма вычисления многочленов на матрице $F \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ с алгебры $\mathbb{C}[z]$ на бо́льшую алгебру функций $\mathcal{C} \supset \mathbb{C}[z]$ состоит в том, чтобы наделить пространства $\mathbb{C}[z]$ и $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ той или иной топологией, представить функцию $f \in \mathcal{C}$ как предел последовательности многочленов и определить $f(F)$ как предел последовательности операторов $f_n(F) \in \mathrm{End}(V)$, после чего проверить, что $f(F)$ зависит только от f, а не от выбора сходящейся к f последовательности многочленов, а полученное отображение $\mathrm{ev}_F : \mathcal{C} \to \operatorname{End} V$ является гомоморфизмом алгебр[1]. Однако, как бы ни определялась сходимость в пространстве функций и какой бы ни была сходящаяся к функции f последовательность многочленов f_n, последовательность операторов $f_n(F)$ всегда лежит в конечномерном векторном пространстве, порождённом степенями F^m с $0 \leqslant m < \dim V$, и если переход к пределу в пространстве матриц перестановочен со сложением и умножением на константы[2], то предел последовательности $f_n(F)$ неминуемо будет *многочленом* от F степени, меньшей чем $\dim V$. Это означает, что какая бы аналитическая процедура не применялась для построения гомоморфизма $\mathrm{ev}_F : \mathcal{C} \to \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$, значение этого гомоморфизма на заданной функции f *a priori* вычисляется по теор. 11.3.

[1] в качестве упражнения по анализу читателю настоятельно рекомендуется попробовать самостоятельно реализовать эту программу, используя на пространстве функций топологию, в которой сходимость последовательности функций означает равномерную сходимость в каждом круге в $\mathbb{C}$, а на пространстве $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ — стандартную топологию пространства $\mathbb{C}^{n^2}$, где сходимость определяется покоординатно

[2] т. е. $\lim\limits_{n\to\infty}(\lambda F_n + \mu G_n) = \lambda \lim\limits_{n\to\infty} F_n + \mu \lim\limits_{n\to\infty} G_n$

Отметим также, что если операторы $F : V \to V$ и $G : W \to W$ подобны, т. е. $G = CFC^{-1}$ для некоторого изоморфизма $C : V ⥲ W$, то и функции от них подобны: $f(G) = Cf(F)C^{-1}$, поскольку соотношение $f_n(G) = Cf_n(F)C^{-1}$ выполнено для всех многочленов, приближающих функцию f, а стало быть, останется выполненным и в пределе, при условии, что топология на пространствах $\operatorname{End} V$ и $\operatorname{End} W$ такова, что все *линейные* отображения $\operatorname{End} V \to \operatorname{End} W$ непрерывны.

Упр. 11.2. Пусть $\Bbbk[t]/\left(t^n\right) = U \oplus W$, где U и W переводятся в себя умножением на t. Оба этих подпространства не могут целиком содержаться в образе оператора умножения на t (иначе их сумма тоже бы в нём содержалась), поэтому в одном из них, скажем, в U, есть класс $a \pmod{t^n}$, где $a \in \Bbbk$ отлично от нуля. Но тогда в U лежат все классы $at^m \pmod{t^n}$ с $0 \leqslant m \leqslant (n-1)$, а они линейно порождают всё пространство $\Bbbk[t]/\left(t^n\right)$.

Упр. 11.3. Если $V = U \oplus W$, где U и W F-инвариантны, то $V^* = \operatorname{Ann} U \oplus \operatorname{Ann} W$ и оба подпространства $\operatorname{Ann} U$ и $\operatorname{Ann} W$ будут F^*-инвариантны: скажем, если $\xi \in \operatorname{Ann} U$, то $\forall\, u \in U$ $\langle F^*\xi\,,\, u\rangle = \langle \xi\,,\, Fu\rangle = 0$, поскольку $Fu \in U$, и значит, $F^*\xi \in \operatorname{Ann} U$. Обратная импликация получается по двойственности в силу изоморфизма $V^{**} = V$.

Упр. 11.4. Так как любой вектор $h \in H$ представляется в V как $h = u + q + r$ с $u \in U$, $q \in Q$, $r \in R$, в U выполняется равенство $h = \pi(h) = \pi(u) + \pi(r)$, в котором $\pi(u) = u \in U$ и $\pi(r) \in W$, т. е. $U + W = H$. Если $u \in U \cap W$, то $u = \pi(r)$ для некоторого $r \in R$, и $\pi(u - r) = \pi(u) - \pi(r) = u - u = 0$, откуда $u - r \in \ker \pi = Q$, что возможно только при $u = r = 0$. Поэтому $U \cap W = 0$.

Упр. 11.5. В согласованном с разложением в прямую сумму базисе матрица $tE - F$ имеет блочно диагональный вид $\begin{pmatrix} tE - G & 0 \\ 0 & tE - H \end{pmatrix}$. С другой стороны, для любых матриц $A \in \operatorname{Mat}_n(\Bbbk)$, $C \in \operatorname{Mat}_m(\Bbbk)$, $B \in \operatorname{Mat}_{n\times m}(\Bbbk)$ определитель $\det\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C\end{pmatrix} = \det A \cdot \det C$ согласно формуле для разложения определителя по первым n столбцам.

Упр. 11.6. Пусть $f = t^n + a_1 t^{n-1} + \dots + a_{n-1} t + a_n$. Напишите матрицу F оператора умножения на t в фактор кольце $\Bbbk[x]/(f)$ в базисе из классов мономов t^{n-1}, t^{n-2}, $\cdots$, t, 1 и разложите $\det(tE - F)$ по первому столбцу.

Упр. 11.7. Поскольку умножение на произведение всех элементарных делителей полностью аннулирует прямую сумму форм. (11-1) на стр. 162, оператор $\chi_F(F)$ нулевой для любого оператора F над любым полем $\Bbbk$. Поскольку теорема Гамильтона-Кэли для матрицы A представляет собою набор тождеств между многочленами с целыми коэффициентами от элементов матрицы A, достаточно убедиться в её справедливости для всех матриц с рациональными элементами, т. е. для любого оператора над полем $\mathbb{Q}$.

Упр. 11.8. Если $\lambda \in \operatorname{Spec} F$ и $g(\lambda) \neq 0$, то $g(F)$ действует на ненулевом собственном подпространстве V_λ умножением на ненулевое число $g(\lambda)$. Тем самым, $g(F) \neq 0$.

Упр. 11.9. Над алгебраически замкнутым полем всякий многочлен имеющий только один корень 0 равен t^m. Поэтому $\chi_F(t) = t^m$ и по теореме Гамильтона – Кэли $F^m = 0$.

Упр. 11.11. Разложение характеристического многочлена оператора F в виде произведения степеней попарно разных линейных форм $\chi_F(t) = \prod\limits_{\lambda \in \operatorname{Spec} F} (t - \lambda)^{N_\lambda}$ удовлетворяет условиям предл. 11.7 с $q_i = (t - \lambda)^{N_\lambda}$, а корневые подпространства $K_\lambda = \ker(\lambda \operatorname{Id} - F)^{N_\lambda}$.

Упр. 11.12. Если $a^n = 0$, $b^m = 0$ и $ab = ba$, то по формуле Ньютона $(a + b)^{m+n-1} = 0$.

Упр. 11.14. Отображение (11-16) линейно. Равенство $s(fg) = s(f)s(g)$ достаточно проверять отдельно для каждой струи s_λ^m. По формуле Лейбница $(fg)^{(k)} = \sum\limits_{\nu+\mu=k} \binom{k}{\nu} f^{(\nu)} g^{(\mu)}$. Поэтому имеют место следующие сравнения по $\bmod (t-\lambda)^m$:

$$s_\lambda^m(fg) \equiv \sum_k \frac{(t-\lambda)^k}{k!} \sum_{\nu+\mu=k} \frac{k!}{\nu!\,\mu!} f^{(\nu)}(\lambda) g^{(\mu)}(\lambda) \equiv$$

$$\equiv \sum_k \sum_{\nu+\mu=k} \frac{f^{(\nu)}(\lambda)}{\nu!}(t-\lambda)^\nu \cdot \frac{g^{(\mu)}(\lambda)}{\mu!}(t-\lambda)^\mu \equiv s_\lambda^m(f) s_\lambda^m(g)$$