Письменный экзамен за второй семестр

Задачи можно решать в любом порядке. Полное решение каждой задачи оценивается в 10 баллов. Один ответ без объяснений оценивается в нуль баллов вне зависимости от того, верный он или нет. Для получения 100%-ного результата достаточно набрать 60 баллов.

Задача 1 (10 баллов). Всякие ли две вещественные $n \times n$ матрицы A и B, сопряжённые[1] друг другу над полем $\mathbb{C}$, сопряжены также и над $\mathbb{R}$ (т. е. посредством вещественной матрицы C)?

Задача 2 (10 баллов). Грани кубика красят в красный, в белый, или в синий цвет. Сколько разных крашеных кубиков можно получить таким образом?

Задача 3 (10 баллов). Существуют ли простые группы порядка 12?

Задача 4 (10 баллов). Из скольких точек состоит поверхность $x_0^3 + x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 0$ в проективном пространстве $\mathbb{P}_3$ над полем[2] $\mathbb{F}_4$?

Задача 5. На конечномерном пространстве V над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$ характеристики нуль задана невырожденная билинейная форма[3] $\beta : V \times V \to \Bbbk$ и изометрический оператор[4] $f : V \to V$. Верно ли, что[5]

а) **(10 баллов)** f обязательно диагонализуем

б) **(10 баллов)** линейные оболочки двух жордановых цепочек разной длины оператора f двусторонне ортогональны друг другу

в) **(10 баллов)** всякий оператор $h \in \mathrm{GL}(V)$ однозначно записывается в виде композиции $h = gs$, в которой g изометричен, а s самосопряжён[6]?

Задача 6 (10 баллов). Найдите все кватернионы с квадратом -1, коммутирующие с кватернионом $\boldsymbol{x}$, удовлетворяющим линейному уравнению $\boldsymbol{x} \cdot (1 - \boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}) = 35 - 7\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} + 5\boldsymbol{k}$.

[1] т. е. существует такая матрица $C \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, что $CAC^{-1} = B$

[2] напомню, что $\mathbb{F}_4 = \{a + b\omega \mid a, b \in \mathbb{Z}/(2),\ \omega^3 = 1,\ \omega \neq 1\}$

[3] не обязательно симметричная или кососимметричная

[4] т. е. такой, что $\forall\, u, w \in V\ \beta(fu, fw) = \beta(u, w)$

[5] если да, докажите, если нет, приведите контрпример

[6] т. е. таков, что $\forall\, u, w \in V\ \beta(su, w) = \beta(u, sw)$