Письменный экзамен за второй семестр

Задачи можно решать в любом порядке. Полное решение каждой задачи оценивается в 10 баллов. Один ответ без объяснений оценивается в нуль баллов вне зависимости от того, верный он или нет. Для получения 100%-ного результата достаточно набрать 60 баллов.

Задача 1 (10 баллов). Найдите все собственные векторы и собственные значения линейного оператора $x\dfrac{\partial}{\partial y} + y\dfrac{\partial}{\partial x}$ на пространстве многочленов степени $\leqslant n$ от x и y.

Задача 2 (10 баллов). Какова сигнатура квадратичной формы $A \mapsto \operatorname{tr}\left(A^2\right)$ на пространстве вещественных $n \times n$-матриц?

Задача 3 (10 баллов). Верно ли, что в группе порядка p^n любая подгруппа порядка p^k с $k < n$ содержится в некоторой подгруппе порядка p^{k+1} ?

Задача 4 (10 баллов). Рассмотрев действие группы G на множестве силовских 5-подгрупп, покажите, что всякая простая группа G порядка 60 изоморфна A_5.

Задача 5. Существует ли комплексная 2×4-матрица с множеством 2×2-миноров

а) (10 баллов) $\{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ **б) (10 баллов)** $\{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$?

(Если да, приведите пример такой матрицы, если нет — объясните, почему.)

Задача 6 (10 баллов). Зафиксируем на $\mathbb{C}^n$ стандартную эрмитову структуру. Для эрмитовой $n \times n$-матрицы A и произвольного r-мерного подпространства $L \subset \mathbb{C}^n$ положим $R_L(A) = \sum\limits_{i=1}^{r}(Ae_i, e_i)$, где $e_1, e_2, \dots, e_r \in L$ — какой-нибудь ортонормальный базис в L.

а) (10 баллов) Зависит ли $R_L(A)$ от выбора ортонормального базиса в L?

б) (10 баллов) Пусть матрица A имеет попарно различные собственные значения

$$\alpha_1 > \alpha_2 > \dots > \alpha_n \ .$$

Чему равен $\max\limits_{L} R_L(A)$ по всем r-мерным подпространствам $L \subset \mathbb{C}^n$?

Задача 7 (10 баллов). Решите в теле кватернионов $\mathbb{H}$ систему уравнений

$$\begin{cases} \boldsymbol{k} = (1 + \boldsymbol{i}) \cdot x + \boldsymbol{j} \cdot y \\ \boldsymbol{i} = (1 + \boldsymbol{j}) \cdot x + \boldsymbol{k} \cdot y \end{cases}$$