Симметрические функции

А10◇1°. Пусть $t^3+pt+q=\prod(t-\alpha_\nu)$. Выразите $\prod_{\mu<\nu}(\alpha_\mu-\alpha_\nu)$, $\sum\alpha_\nu^2$ и $\sum\alpha_\nu^3$ через p, q.

Обозначения. Обозначим через $S^d\subset\mathbb{Z}[x_1,x_2,\dots,x_n]$ модуль однородных симметрических многочленов степени d. Через $S^d_{\mathbb{Q}}$ мы обозначаем аналогичное пространство симметрических многочленов с коэффициентами в $\mathbb{Q}$. Для каждого $d\in\mathbb{N}$ в S^d лежат: *многочлены Ньютона* $p_d=\sum\limits_i x_i^d$, *полные симметрические многочлены* $h_d=$ (сумма всех мономов степени d), а также (при $d\leqslant n$) *элементарные симметрические многочлены*: $e_d(x)=\sum\limits_{1\leqslant i_1<i_2<\dots<i_d\leqslant n}x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_d}$. Положим $e_0=h_0=1$ и $e_d=h_d=0$ при $d<0$. Для каждой диаграммы Юнга $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n)$ из $\leqslant n$ строк образуем *мономиальный симметрический многочлен* $m_\lambda=\sum\limits_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}x_{\sigma(1)}^{\lambda_1}x_{\sigma(2)}^{\lambda_2}\cdots x_{\sigma(n)}^{\lambda_n}\in S^{|\lambda|}$, а для каждой диаграммы $\mu=(\mu_1,\mu_2,\dots,\mu_\nu)$ ширины $\mu_1\leqslant n$ — произведения $e_\mu=e_{\mu_1}e_{\mu_2}\cdots e_{\mu_m}\in S^{|\mu|}$ и $p_\mu=p_{\mu_1}p_{\mu_2}\cdots p_{\mu_m}$.

А10◇2 (производящие функции). Докажите тождества: **а)** $E(t)=\sum\limits_{d\geqslant0}e_d(x)t^d=\prod_{i=1}^n(1+x_it)$

б) $H(t)=\sum\limits_{d\geqslant0}h_d(x)t^d=\prod_{i=1}^n(1-x_it)^{-1}$ **в)** $P(t)=\sum\limits_{d\geqslant1}p_d(x)t^{d-1}=\frac{d}{dt}\ln\prod_{i=1}^n(1-x_it)^{-1}$

г) $H(t)E(-t)=1$ и $H'(t)E(-t)=P(t)$ **д)** $\sum\limits_{i=0}^d(-1)^ie_ix_j^{d-i}=0\quad\forall\, j=1,\,2\,\dots$ и $\forall\, d\leqslant n$

е) $\sum\limits_{i=0}^d(-1)^ie_ih_{d-i}=0\quad\forall\, d\leqslant n$ **ж)** $dh_d=\sum\limits_{i=1}^d p_ih_{d-i}\quad\forall\, d$ **з)** $de_d=\sum\limits_{i=1}^d(-1)^{i-1}p_ie_{d-i}\quad\forall\, d\leqslant n.$

А10◇3 (стандартные базисы). Покажите, что: **а)** m_λ с λ веса d составляют базис S^d над $\mathbb{Z}$

б) e_μ с μ веса d и ширины $\leqslant n$ составляют базис модуля S^d над $\mathbb{Z}$

в) e_μ с μ веса d и ширины $\leqslant n$ составляют базис пространства $S^d_{\mathbb{Q}}$ над $\mathbb{Q}$

А10◇4. Пусть H и E — квадратные верхнетреугольные матрицы одинакового размера с элементами $H_{ij}=h_{j-i}$ и $E_{ij}=(-1)^{j-i}e_{j-i}$. Вычислите произведения EH и HE.

А10◇5. Докажите, что $\det\left(e_{j-i+\lambda_i}\right)=\det\left(h_{j-i+\lambda'_i}\right)$ для сопряжённых диаграмм λ, λ'.

Таблицы Юнга и полиномы Шура. Пусть $n\leqslant w$. Диаграмма Юнга, в клеточки которой записаны (возможно, с повторениями) *все* переменные $x_1,x_2,\dots,x_n$ так, чтобы их номера строго возрастали вдоль столбцов и не убывали вдоль строк называется *таблицейЮнга* на алфавите $(x_1,x_2,\dots,x_n)$. Таблицы с $w=n$ называются *стандартными*. Каждой таблице T отвечает моном x^T — произведение содержимого таблицы, и сумма $s_\lambda=\sum\limits_{T\mapsto\lambda}x^T$ по всем таблицам с данной диаграммой λ называется *многочленом Шура*.

Выталкивание — это добавление к данной таблице Юнга T новой переменной x_α (увеличивающее вес диаграммы на единицу) по следующему правилу: если α не меньше каждого из номеров в первой строке, записываем x_α в конец этой строки; если нет — ставим x_α на место самого левого x_β с $\beta>\alpha$, а x_β извлекаем из первой строки и повторяем процедуру со второй строкой и с x_β вместо x_α и т. д. Произведение таблиц TU — это таблица, получающаяся последовательным добавлением элементов U к T посредством выталкивания, причём элементы извлекаются из U последовательным прочтением строк слева направо, начиная *с нижней* и двигаясь вверх.

А10◇6* (кнутовские перестройки). Будем называть w-буквенные слова из букв $x_1,x_2,\dots,x_n$ (где $w\geqslant n$ и все буквы задействованы) РШК-эквивалентными[1], если они могут быть получены друг из друга перестройками троек последовательных соседних букв таких двух типов:

$$x_\beta x_\alpha x_\gamma\xleftrightarrow{\text{при }\alpha\leqslant\gamma<\beta}x_\alpha x_\beta x_\gamma\qquad\text{и}\qquad x_\alpha x_\beta x_\gamma\xleftrightarrow{\text{при }\beta<\alpha\leqslant\gamma}x_\alpha x_\gamma x_\beta$$

Докажите, что сопоставление таблице T слова, получающегося последовательным прочтением строк T слева направо, начиная *с нижней* и двигаясь вверх, устанавливает взаимно однозначное соответствие между таблицами, получающимися из всевозможных диаграмм веса

[1] первые буквы фамилий *Робинсон*, *Шенстеда* и *Кнут*

w, на алфавите $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и классами РКШ – эквивалентных w-буквенных слов на том же алфавите, в которых все буквы задействованы, причём произведению таблиц при этом соответствии отвечает приписывание слов друг к другу.

А10◇7*. Покажите, что соответствие $T \mapsto x^T$ переводит произведение таблиц в произведение мономов и что полиномы Шура являются симметирескими функциями и образуют базис модуля симметрических функций над $\mathbb{Z}$.

А10◇8* (правила Пьери). Обозначим через (p) и (1^p) диаграммы Юнга веса p, состоящие, соответственно, из единственной строки и единственного столбца. Проверьте, что:

а) $s_\lambda \cdot s_{(p)} = \sum s_\mu$, где μ пробегает все диаграммы, получающимся добавлением p клеток к диаграмме λ так, чтобы никакие две из добавленных клеток не оказались в одном столбце.

б) $s_\lambda \cdot s_{(1^p)} = \sum s_\mu$, где μ пробегает все диаграммы, получающимся добавлением p клеток к диаграмме λ так, чтобы никакие две из добавленных клеток не оказались в одной строке.

А10◇9*. Покажите, что $s_\lambda \cdot \det\left(x_j^{n-i}\right) = \det\left(x_j^{n-i+\lambda_i}\right) = \prod_{j=1}^{n}(1-x_j) \cdot \sum\limits_{\overline{\nu}} \det\left(x_j^{\nu_i}\right)$ (сумма по всем $\overline{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n)$ с $\nu_1 \geqslant (1+\lambda_1) > \nu_2 \geqslant (2+\lambda_2) > \dots > \nu_n \geqslant (n+\lambda_n)$).

А10◇10* (тождество Джамбелли - Якоби - Труди). Для диаграммы λ из $\leqslant n$ строк обозначим через X_λ, H_λ и E_λ матрицы размера $n \times n$ с элементами $X_{ij} = x_j^{n-i+\lambda_i}$, $H_{ij} = h_j^{n-i+\lambda_i}$ и $E_{ij} = (-1)^{j-i} e_j^{n-i+\lambda_i}$. Проверьте матричное равенство $X_\lambda = H_\lambda E_{(0\dots0)} X_{(0\dots0)}$ и докажите, что $s_\lambda = \det\left(h_{j-i+\lambda_i}\right) = \det\left(e_{j-i+\lambda'_i}\right)$.

А10◇11* (тождество Коши). Докажите в $\mathbb{Z}[\,x_1, x_2, \dots, x_n\,,\,y_1, y_2, \dots, y_n\,]$ тождества:

$$\det\left((1-x_i y_j)^{-1}\right) = \det\left(x_j^{n-i}\right)\det\left(y_j^{n-i}\right)\prod_{i,j}(1-x_i y_j)^{-1} =$$

$$= \sum_\lambda \det\left(x_j^{n-i+\lambda_i}\right)\det\left(y_j^{n-i+\lambda_i}\right) = \sum_\lambda s_\lambda(x) s_\lambda(y)$$

(сумма по всем λ из $\leqslant n$ строк).

[0]Подсказки. В **??** вычислите первый определитель двумя способами: по индукции (вычесть первую строку и первый столбец из всех прочих и вынести общие множители) и раскрыв его в лоб (предварительно разложив все дроби в ряды). В **??** помогают **??** и соотношения Лапласа.