Формальные степенные ряды

все ряды ряды рассматриваются над произвольным полем $\mathbb{F}$ с $\mathrm{char}(\mathbb{F}) = 0$

А9◇1°. Покажите, что для любого ряда $f(x) = \sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ коэффициент при t в разложении $f(x+t)$ по степеням t равен результату подстановки $t_1 = t_2 = x$ в ряд $\big(f(t_1) - f(t_2)\big) : (t_1 - t_2)$ и равен $f'(x) = \sum_{n\geqslant 1} n a_n x^{n-1}$, а также сформулируйте и докажите правила дифференцирования произведений, частных и композиций.

А9◇2. Обозначим через $N \subset \mathbb{F}[[t]]$ аддитивную группу рядов без свободного члена, а через $U \subset \mathbb{F}[[t]]$ мультипликативную группу рядов с единичным свободным членом. Будут ли:

а) логарифмическая производная $f \longmapsto \ln(f)'$ биекцией между N и $\mathbb{F}[[t]]$?

б) экспонента и логарифм $N \underset{\ln}{\overset{\exp}{\rightleftarrows}} U$ взаимно обратными изоморфизмами групп?

А9◇3. Убедитесь, что $\forall\ f \in U,\ \alpha \in \mathbb{F}$ в $\mathbb{F}[[t]]$ корректно определён ряд $f^\alpha \overset{\text{def}}{=} e^{\alpha \ln f}$. Верно ли, что **а)** $f^{\alpha_1} f^{\alpha_2} = f^{\alpha_1+\alpha_2}$ **б)** $(f^{\alpha_1})^{\alpha_2} = f^{\alpha_1\alpha_2}$ **в)** f^{-1} обратен к f?

А9◇4 (бином Ньютона). Вычислите явно коэффициенты ряда $(1+t)^\alpha$.

А9◇5°. Найдите в n-тый коэффициент ряда: **а)** $1/(t^2+t+1)$ **б)** $1/\big((t+1)^2(t-2)(t+3)^3\big)$ **в)** $\sqrt[3]{1+2t}$ **г)** $1/\sqrt{1-3t}$ **д)** $\mathrm{ch}(x) = (e^x + e^{-x})/2$ **е)** $\mathrm{sh}(x) = (e^x - e^{-x})/2$ **ж)** $\cos(x) = (e^{ix} + e^{-ix})/2$ **з)** $\sin(x) = (e^{ix} - e^{-ix})/2i$

А9◇6. Рациональна ли производящая функция $P_m(t) = \sum p_m(n)\, t^n$ для чисел $p_m(n)$ диаграмм Юнга веса n из $\leqslant m$ строк? Выразите $p_m(n)$ через $p_{m-1}(n)$ и $p_m(n-m)$.

А9◇7. Выразите коэффициенты ряда $P(t) = \prod_{k\geqslant 1}(1-t^k)^{-1}$ через числа $p(n)$ всех диаграмм Юнга веса n и покажите, что $1/P(t) = 1 + \sum_{n\geqslant 1}\left(\widehat{p}_{\text{ч}}(n) - \widehat{p}_{\text{н}}(n)\right)\cdot t^n$, где $\widehat{p}_{\text{ч}}(n)$ и $\widehat{p}_{\text{н}}(n)$ суть количества диаграмм Юнга веса n без одинаковых строк, состоящих, соответственно, из чётного и нечётного количества строк.

А9◇8*. Докажите, что $p(n) = \sum_{k\geqslant 1}(-1)^{k+1}\left(p\left(n - \frac{3k^2-k}{2}\right) + p\left(n - \frac{3k^2+k}{2}\right)\right)$ и вычислите $p(10)$.

А9◇9*. Методом производящих функций выясните, сколькими способами можно разрезать выпуклый n-угольник на треугольники по непересекающимся нигде кроме вершин диагоналям.

А9◇10. Пусть $F(t) = \sum a_k t^k \in \mathbb{F}[[t]]$. Убедитесь, что отображение $\widetilde{F} = F(d/dx) : \mathbb{F}[x] \longrightarrow \mathbb{F}[x]$, переводящее $g \in \mathbb{F}[x]$ в $\sum a_k (d/dx)^k g$, корректно определено и $\mathbb{F}$-линейно. Выразите коэффициенты многочлена $F_n(x) = \widetilde{F}(x^n)$ через коэффициеты ряда F и покажите, что ряд F однозначно восстанавливается по набору многочленов[1] F_n.

А9◇11 (формула Тейлора). Как действует на $\mathbb{F}[x]$ оператор $e^{\alpha\frac{d}{dx}}$ (где $\alpha \in \mathbb{F}$)? Каким рядам отвечают разностные операторы: $f(x) \overset{\nabla}{\longmapsto} f(x) - f(x-1)$ и $f(x) \overset{\Delta}{\longmapsto} f(x+1) - f(x)$?

А9◇12. Покажите, что образ гомоморфизма $F \mapsto F(d/dx)$ из **??** состоит из всех $\mathbb{F}$-линейных эндоморфизмов векторного пространства $\mathbb{F}[x]$, перестановочных со всеми операторами сдвига $T_\alpha : f(x) \mapsto f(x+\alpha)$ (где $\alpha \in \mathbb{F}$).

А9◇13 (ряд Тодда). Ряд $B(t) = \frac{t}{e^t - 1} = \sum \frac{b_k}{k!}\, t^k$ называется *рядом Тодда*, многочлены $B_n(x) = \widetilde{B}(x^n)$ — *многочленами Бернулли*, а числа b_k — *числами Бернулли*. Найдите $\big((B(t) - B(-t)\big)/2$ и все числа b_{2k+1}. Выразите b_n через $b_0, b_1, \dots, b_{n-1}$, а B_n — через $B_0, B_1, \dots, B_{n-1}$. Вычислите первые 8 чисел и многочленов Бернулли.

А9◇14*. Верно ли что числа b_{2k} образуют знакопеременную последовательность?

А9◇15 (суммирование степеней). Покажите, что есть многочлен $s_m(x) \in \mathbb{Q}[x]$, такой что $\forall n \in \mathbb{N}\ \ 1^m + 2^m + \dots + (n-1)^m = s_m(n)$, вычислите $\Delta s_m(x)$, найдите $F \in \mathbb{Q}[[t]]$, для которого $\widetilde{F}(x^n) = s_m'(x)$, и выразите коэффициенты s_m через числа Бернулли. Напишите явную формулу для суммирования 5-х степеней.

[1] они называются *аппелевыми многочленами* ряда F