$\mathbb{Z}$-модули

A8◇1. Допишем снизу и справа к $m \times n$-матрице A единичные матрицы размеров $m \times m$ и $n \times n$ соответственно, так чтобы получилась Г-образная таблица вида $\begin{matrix} A & E \\ E & \end{matrix}$, и будем применять к этой таблице обратимые элементарные преобразования строк и столбцов. Пусть в результате таких преобразований получится таблица $\begin{matrix} D & U \\ V & \end{matrix}$. Как связаны между собой матрицы A, D, U и V? Как применить это наблюдение к явному отысканию взаимных базисов для подмодуля свободного модуля над евклидовым кольцом?

A8◇2°. Что за абелева группа получится при факторизации $\mathbb{Z}^3$ по подмодулю, порождённому векторами $(2,-4,6,-6)$, $(-3,6,-6,10)$, $(-8,2,5,8)$, $(6,0,-2,-6)$.

A8◇3°. Является ли $\mathbb{Z}$-подмодуль $M \subset \mathbb{Z}[x]$, состоящий из всех многочленов с чётным свободным членом: **а)** конечно порожденным? **б)** свободным? **в)** Существует ли $N \subset \mathbb{Z}[x]$, такой что $M \oplus N = \mathbb{Z}[x]$?

A8◇4. Пусть v_1, v_2, $v_3 \in \mathbb{Z}^3 \subset \mathbb{R}^3$ — три линейно независимых над $\mathbb{R}$ целых вектора, $L \subset \mathbb{Z}^3$ — порождённый ими $\mathbb{Z}$-подмодуль, Π — натянутый на эти векторы параллелепипед, а M — матрица, составленная из столбцов их координат. Как связаны между собой числа:

а) объём Π (т. е. $|\det M|$); **б)** число элементов в фактор модуле $\mathbb{Z}^3/L$;

в) $в + г/2 + р/4 + 1$, где $в$, $г$ и $р$ суть количества целых точек, находящихся строго внутри самого Π, его граней и его рёбер соответственно?

Как обобщить этот результат на произвольную размерность?

A8◇5 (целозначные многочлены). Рассмотрим $\mathbb{Z}$Д модуль $M \subset \mathbb{Q}[t]$, состоящий из всех многочленов, принимающих целые значения при всех целых значениях t, и обозначим через $M_d \subset M$ подмодуль, образованный всеми многочленами степени $\leqslant d$.

а) Покажите, что M и все M_d свободны, и найдите $\operatorname{rk} M_d$.

б) Образуют ли многочлены $\beta_k^{(d)}(t) \overset{\text{def}}{=} \binom{t+k}{d} = \frac{1}{d!}(t+k)(t+k-1)\cdots(t+k-d+1)$ с $0 \leqslant k \leqslant d$ базис M_d над $\mathbb{Z}$?

в) Образуют ли многочлены $\gamma_k(t) \overset{\text{def}}{=} \binom{t+k}{k} = \frac{1}{k!}(t+1)(t+2)\cdots(t+k)$ базис M над $\mathbb{Z}$?

г) Как устроен фактор модуля M_d по подмодулю многочленов с целыми коэффициентами, в частности, конечен ли он, и если да, то сколько в нём элементов?

д*) Покажите, что кольцо всех $\mathbb{Z}$-линейных эндомоморфизмов $M \longrightarrow M$, перестановочных со всеми операторами сдвига: $f(t) \longmapsto f(t+n)$, изоморфно $\mathbb{Z}[[\nabla]]$, где $\nabla : f(t) \longmapsto \big(f(t) - f(t-1)\big)$ (в частности, коммутативно).

A8◇6 (двойственные решётки). Пусть $\mathbb{Z}$-модуль $N \subset \mathbb{Z}^n$ таков, что фактор модуль $\mathbb{Z}^n/N$ конечен, и пусть $L = \operatorname{Hom}(\mathbb{Z}^n, \mathbb{Z})$, $N' = \varphi \in \operatorname{Hom}(\mathbb{Z}^n, \mathbb{Q}) \mid \varphi(N) \subset \mathbb{Z}$. Как связаны между собой $\mathbb{Z}^n/N$ и N'/L? В частности, одинаково ли у них число элементов?

A8◇7 (полупростые $\mathbb{Z}$-модули). Будем называть $\mathbb{Z}$-модуль M *полупростым*, если для любого собственного ненулевого подмодуля $N \subset M$ можно указать подмодуль $L \subset M$, такой что $M = L \oplus M$. Будут ли полупростыми $\mathbb{Z}$-модули (всюду далее $m, n \in \mathbb{N}$ – любые):

а) $\mathbb{Z}$ **б)** $\mathbb{Z}^n$ **в)** $\mathbb{Z}/(p^m)$ **г)** $\big(\mathbb{Z}/(p)\big)^n$ **д)** $\big(\mathbb{Z}/(p)^m\big)^n$

A8◇8. Верно ли, что $\operatorname{Hom}(M_1 \oplus M_2, N_1 \oplus N_2) = \bigoplus\limits_{\mu,\nu=1}^{2} \operatorname{Hom}(M_\mu, N_\nu)$?

A8◇9. Вычислите модуль всех $\mathbb{Z}$-линейных гомоморфизмов $\operatorname{Hom}(\mathbb{Z}/(m), \mathbb{Z}/(n))$ в случае, когда **а)** $m = p^\mu$, $n = p^\nu$ (p простое, $\mu, \nu \in \mathbb{N}$ любые) **б)** $\text{нод}(m,n) = 1$ **в)** m, n любые