Векторные подпространства и линейные операторы

всюду в этом листке речь идёт про конечномерные векторные пространства над полем

А7◇1°. Для любого множества векторов $M \subset V$ обозначим через $\mathrm{Span} M \subset V$ их линейную оболочку, а через $\mathrm{Ann}\, M \subset V^*$ множество всех линейных форм, зануляющихся всюду на M. Как связаны $\mathrm{Ann}\,\mathrm{Ann}\, M$ и $\mathrm{Span} M$? Докажите, что соответствие $U \longleftrightarrow \mathrm{Ann}\, U$ является оборачивающей включение биекцией между множествами всех подпространств в V и V^*.

А7◇2°. В $\mathbb{Q}^4$ найдите размерность и какой-либо базис у суммы и пересечения подпространств:

а) $\mathrm{Span}\Big((1,1,1,1)\,,\,(1,-1,1,-1)\,,\,(1,3,1,3) \Big)$ и $\mathrm{Span}\Big((1,2,0,2)\,,\,(1,2,1,2)\,,\,(3,1,3,1) \Big)$

б) $\mathrm{Span}\Big((1,1,0,0)\,,\,(0,1,1,0)\,,\,(0,0,1,1) \Big)$ и $\mathrm{Ann}\,\Big((1,0,1,0)\,,\,(0,2,1,1)\,,\,(1,2,1,2) \Big)$

в) $\mathrm{Ann}\,\Big((1,1,0,0)\,,\,(0,1,1,0))\,,\,(0,0,1,1) \Big)$ и $\mathrm{Ann}\,\Big((1,2,0,2)\,,\,(1,2,1,2),\,,\,(3,1,3,1) \Big)$

А7◇3. Для подпространств $U, W \subset V$ выразите $\dim(U+W)$ через $\dim U$, $\dim W$ и $\dim(U \cap W)$ и получите точную оценку снизу для $\dim(U \cap V)$ через $\dim V$, $\dim U$, $\dim W$.

А7◇4. Пусть $\dim(U+V) = \dim(U \cap V) + 1$ для некоторых подпространств $U, V \subset V$. Верно ли, что $U+V$ равно одному из подпространств U, V, а $U \cap V$ — другому? Покажите, что любые два подпространства в наборе k-мерных подпространств $W_1, W_2, \dots, W_m$ тогда и только тогда имеют $(k-1)$-мерное пересечение, когда все они либо содержатся в одном $(k+1)$-мерном подпространстве, либо содержат общее $(k-1)$-мерное подпространство.

А7◇5. Проверьте, что отображение $\mathrm{Hom}(V,W) \xrightarrow{F \mapsto F^*} \mathrm{Hom}(W^*, V^*)$ является изоморфизмом, причём $(FG)^* = G^* F^*$. Как связана матрица $V \xrightarrow{F} V$ в произвольном базисе V с матрицей $V^* \xrightarrow{F^*} V^*$ в двойственном базисе V^*? Докажите, что отображение $V \xrightarrow{v \mapsto \mathrm{ev}_v} V^{**}$ является изоморфизмом и отождествляет F^{**} с F для любого оператора $V \xrightarrow{F} W$.

А7◇6. Для любого ли оператора $V \xrightarrow{F} W$ выполнены соотношения:

а) $\dim(\ker F) + \dim(\mathrm{im}\, F) = \dim V$ **б)** $\ker F^* = \mathrm{Ann}\,(\mathrm{im}\, F)$ **в)** $\mathrm{im}\, F^* = \mathrm{Ann}\,(\ker F)$

А7◇7. Выясните, является ли сумма подпространств $U, W \subset \mathbb{Q}^n$ прямой, и если является, найдите проекции стандартных базисных векторов из $\mathbb{Q}^n$ на каждое из них вдоль другого.

а) U заданно уравнением $x_1 + x_2 + \dots = x_n = 0$, а W — системой $x_1 = x_2 = \dots = x_n$

б) $U = \mathrm{Span}\Big((1,1,1,1)\,,\,(-1,-2,0,1) \Big)$, $W = \mathrm{Ann}\,\Big((-1,-1,1,-1)\,,\,(2,2,0,1) \Big)$ в $\mathbb{Q}^4$

А7◇8. Все векторы пространства являются собственными для F. Верно ли, что $F = \lambda E$?

А7◇9. Единственными ненулевыми элементами матрицы оператора $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ являются числа $\lambda_1 \ \dots\ , \lambda_n$, стоящие на побочной диагонали. Когда такой оператор диагонализуем?

А7◇10. Каковы минимальные многочлены оператора умножения на x и оператора d/dx в пространстве $\mathbb{F}[x]/(x-\lambda)^m$, где $\lambda \in \mathbb{F}$, а $\mathbb{F}$ — поле характеристики **а)** 0 **б)** $p > 0$?

А7◇11. Найдите все собственные числа и собственные подпространства, напишите матрицу в каком-либо базисе и выясните, диагонализуемы ли операторы:

а) $\sum x_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ на многочленах степени $\leqslant d$ от $x_1, \dots, x_n$

б) $\frac{d^k}{dx^k}$ на многочленах степени $\leqslant n$ **в)** $\frac{d^z}{dz^k}$ на квазимногочленах[1] веса λ степени $\leqslant n$;

г) $f(x) \longmapsto \displaystyle\int_0^1 (x^2 y + x y^2) f(y)\, dy$ на вещественных многочленах степени $\leqslant 3$ от x

д) $f(x) \longmapsto f(ax+b)$ (a, b — фиксированные числа) на многочленах степени $\leqslant d$ от x

А7◇12. Пусть линейный оператор $V \xrightarrow{F} V$ на векторном пространстве V над полем $\mathbb{F}$ аннулируется многочленом $f \in \mathbb{F}[x]$, раскладывающимся в произведение попарно взаимно простых многочленов: $f = \prod g_\nu$. Положим $G_i = \prod\limits_{\nu \neq i} g_\nu$. Покажите, что V является прямой суммой всех отличных от нуля образов $\mathrm{im}\, G_i(F) \subset V$.

[1] *казимногочленом* веса λ и степени d называется функция вида $e^{\lambda z}(a_0 + a_1 z + \dots + a_d z^d)$ с $a_d \neq 0$