Расширения колец

А$6\frac{1}{2}\diamond1^\circ$. Пусть A — произвольное коммутативное кольцо с единицей, и $f \in A[x]$ имеет обратимый старший коэффициент. Покажите, что для любого $g \in A[x]$ существуют $q, r \in A[x]$, такие что $g = fq + r$ и либо $\deg r < \deg f$, либо $r = 0$. Выведите отсюда, что для любого приведённого[1] $f \in A[x]$ существует расширение $A \subset B$, такое что f полностью разлагается в $B[x]$ на линейные множители.

А$6\frac{1}{2}\diamond2$. Пусть $A \subset B$ произвольные коммутативные кольца с единицей, и $b \in B$. Равносильны ли друг другу свойства: **а)** $b^m = a_1 b^{m-1} + \dots + a_{m-1} b + a_0$ для неких $m \in \mathbb{N}$, $a_1, a_2, \dots, a_m \in A$;
б) A-модуль, порождённый всеми неотрицательными степенями $\{b^i\}_{i\geqslant 0}$, допускает конечное множество образующих над A;
в) существует B-точный[2] конечно порожденный A-модуль $M \subset B$, такой что[3] $bM \subset M$.

Терминология. Всюду в этом листке слово «кольцо» означает коммутативное кольцо с единицей. Рассмотрим произвольное расширение колец $A \subset B$. Элемент $b \in B$ называется *целым* над A, если он удовлетворяет условиям из зад. А$6\frac{1}{2}\diamond2$. Множество всех $b \in B$, целых над A, называется *целым замыканием* A в B. Если оно совпадает с A, то A называется *целозамкнутым* в B. Если все $b \in B$ целы над A, то расширение $A \subset B$ называется *целым* (а B — *целой A-алгеброй*). Целостное кольцо, целозамкнутое в своём поле частных, называется *нормальным*.

А$6\frac{1}{2}\diamond3$ (инварианты конечной группы). Пусть конечная группа $\mathfrak{G}$ действует на кольце B кольцевыми автоморфизмами $B \xrightarrow{g} B$. Покажите, что B цело над подкольцом инвариантов $B^{\mathfrak{G}} \stackrel{\text{def}}{=} \{a \in B \mid ga = a \ \forall g \in \mathfrak{G}\}$.

А$6\frac{1}{2}\diamond4$. Нормальны ли: **а)** $\mathbb{Z}$ **б)** $\mathbb{Q}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ **в)** любое факториальное кольцо?

А$6\frac{1}{2}\diamond5$. Будет ли целое замыкание A в B подкольцом в B?

А$6\frac{1}{2}\diamond6$. Пусть элемент $c \in C \supset B \supset A$ цел над целым замыканием A в B. Цел ли c над A?

А$6\frac{1}{2}\diamond7$. Пусть $B \supset A$ цело над A. Верно ли что: **а)** если B поле, то и A поле?
б) если A поле, и в B нет делителей нуля, то и B поле?

А$6\frac{1}{2}\diamond8$ (лемма Гаусса-1). Пусть $A \subset B$ — произвольное расширение коммутативных колец. Верно ли, что для целости над A всех коэффициентов произведения двух приведённых многочленов из $B[x]$ необходима[4] и достаточна целость над A всех коэффициентов каждого из сомножителей?

А$6\frac{1}{2}\diamond9$ (лемма Гаусса-2). Пусть A — нормальное кольцо с полем частных $\mathbb{F}$. Верно ли, что произведение двух приведённых многочленов из $\mathbb{F}[x]$ лежит в $A[x]$ тогда и только тогда, когда оба множителя лежат в $A[x]$?

А$6\frac{1}{2}\diamond10$. Рассмотрим поле частных $\mathbb{F}$ какого-нибудь целостного кольца A и произвольную $\mathbb{F}$-алгебру B. Пусть $b \in B$ алгебраичен над $\mathbb{F}$ и имеет минимальный многочлен $f \in \mathbb{F}[x]$. Допустим, что b ещё и цел над A. Верно ли, что тогда все коэффициенты f целы над A?

А$6\frac{1}{2}\diamond11$. Покажите, что если в предыдущей задаче кольцо A нормально, то для того, чтобы произвольный $b \in B$ был цел над A необходимо и достаточно, чтобы b был алгебраичен над $\mathbb{F}$ и его минимальный полином (над $\mathbb{F}$) лежал в $A[x]$.

А$6\frac{1}{2}\diamond12^*$. Пусть $\mathbb{F}$ — любое поле, а $A = \mathbb{F}[a_1, a_2, \dots, a_n]/I$ — произвольная конечно порождённая $\mathbb{F}$-алгебра. Покажите, что A может быть полем только при условии, что все элементы из A алгебраичны[5] над $\mathbb{F}$.

---

[1] условимся называть *приведёнными* любые многочлены со старшим коэффициентом единица

[2] абелева подгруппа $M \subset B$ называется *B-точной*, если $bM = 0 \Rightarrow b = 0$

[3] ПОДСКАЗКА: при выводе (в) $\Rightarrow$ (а) можно воспользоваться тем, что $\det(F) \cdot M \subset F(M) \ \forall\ M \xrightarrow{F} M$

[4] ПОДСКАЗКА: воспользуйтесь зад. А$6\frac{1}{2}\diamond1$

[5] ПОДСКАЗКА: начните со случая $n = 1$ и примените индукцию по n