# Матричная алгебра

**А6◇1°.** На какую матрицу и с какой стороны надо умножить прямоугольную матрицу, чтобы **а)** её $i$-тая и $j$-тая строки поменялись местами; **б)** её $i$-тая строка умножилась на $\lambda$; **в)** к её $i$-той строке прибавилась $j$-тая, умноженная на $\lambda$; **г)** то же, но со столбцами.

Обозначения. В алгебре квадратных матриц $\mathrm{Mat}_n(k)$ ненулевая матрица $A$ называется *нильпотентной*, если $A^n = 0$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$, и *унипотентной* — если $A = E + N$, где $N$ нильпотентна. Матрица $[A, B] = AB - BA$ называтся *коммутатором* миатриц $A$ и $B$. Число $\mathrm{tr}\, A = \sum a_{ii}$ называется *следом* $A$. Многочлен $\chi_A(x) = \det(xE - A) \in k[x]$ называется *характеристическим многочленом* матрицы $A$. Для $f = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n \in k[x]$ мы полагаем $f(A) = a_0A^n + a_1A^{n-1} + \cdots + a_{n-1}A + a_nE$ и обозначаем через $k[A]$ множество всех матриц вида $f(A)$ с всевозможными $f \in k[x]$.

**А6◇2°.** Вычислите $\mathrm{tr}\,[A, B]$ для произвольных квадратных матриц $A, B$.

**А6◇3.** Найдите все матрицы, коммутирующие **а)** с $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ **б)** со всеми $n \times n$-матрицами.

**А6◇4.** Найдите все $2 \times 2$-матрицы с нулевым квадратом.

**А6◇5.** Укажите хоть одну матрицу $A \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{Z})$ удовлетворяющую уравнению $x^2 = 2$. Будет ли при этом полем: **а)** $\mathbb{Z}[A]$, **б)** $\mathbb{Q}[A]$.

**А6◇6.** Подберите $A \in M_2(\mathbb{R})$ так, чтобы $\mathbb{R}[A] \simeq \mathbb{C}$. Из каких матриц состоит это поле?

**А6◇7.** На побочной диагонали $n \times n$-матрицы $A$ стоят числа $\cos(2\pi/a_k) + i\,\sin(2\pi/a_k)$ с некими $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{N}$, в остальных местах — нули. Найдите наименьшее $m$, такое что $A^m = E$.

**А6◇8.** Выполняются ли для любых квадратных матриц $A, B, C$ следующие *правила Лейбница*: **а)** $[A, BC] = [A, B]C + B[A, C]$, **б)** $[A, [B, C]] = [[A, B], C] + [B, [A, C]]$.

**А6◇9.** Выразите $(A + B)^n$ через $A^iB^j$, если **а)** $[A, B] = 0$; **б*)** $[A, B] = B$; **в*)** $[A, B] = A$.

**А6◇10.** Нильпотентна ли сумма двух нильпотентных матриц $A$ и $B$? Докажите, что это так, если **а)** $[A, B] = 0$; **б*)** $[A, [A, B]] = [B, [B, A]] = 0$.

**А6◇11.** Означает ли унипотентность матрицы $A$ существование такого $n \in \mathbb{N}$, что $A^n = E$, над полем **а)** нулевой **б)** конечной характеристики ?

**А6◇12.** Обратимы ли матрицы $E \pm A$, если $A$ — нильпотентна?

**А6◇13.** Для ненулевого $a \in \mathbb{C}$ вычислите: **а)** $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$ **б)** $\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}^{-1}$ **в)** $\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}^{-1}$.

**А6◇14.** Напишите явную формулу для $(ij)$-того элемента матрицы, обратной к верхнетреугольной матрице $(h_{ij})$ с единицами по главной диагонали[1].

**А6◇15.** Выразите коэффициенты $\chi_A(t)$ через миноры матрицы $A$. Как они меняются при заменах $A \mapsto C^{-1}AC$?

**А6◇16.** Вычислите матрицу $\chi_A(A)$ для произвольной квадратной матрицы $A$.

**А6◇17.** Может ли $\dim_k k[A]$ превышать $n$?

**А6◇18.** Докажите, что подстановка фиксированной $n \times n$ матрицы $A$ в степенные ряды задаёт гомоморфизм из подкольца $\mathbb{C}[[z]]$, состоящего из абсолютно сходящихся рядов, в кольцо $k[A]$, причём для любого абсолютно сходящегося ряда $F$ существует многочлен[2] $f_{F,A}(z) \in \mathbb{C}[z]$ степени $\leqslant (n - 1)$, такой что $f_{F,A}(A) = F(A)$.

**А6◇19.** Для каждой из матриц $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ вычислите: **а)** $A^n$ **б)** $\sin A$ **в)** $\cos A$ **г)** $e^A$.

[1] найдите ответ, пригодный и для матриц с элементами из *некоммутативного* кольца

[2] подсказка: нужный многочлен $f_{F,A}(z)$ интерполирует $F(z)$ по значениям $F$ и его производных на корнях $\chi_A$ (с учётом их кратностей, как в зад. А4◇4) и обычно легко находится методом неопределённых коэффициентов