Многочлены, гомоморфизмы, неприводимость и простота

А3◇1°. Пусть $A \xrightarrow{\varphi} B$ – ненулевой гомоморфизм коммутативных колец с единицами. Верно ли, что $\varphi(1) = 1$? А если в B нет делителей нуля?

А3◇2. Пусть $I, J \subset A$ — идеалы в коммутативном кольце с 1. Будет ли идеалом:

а) $I \cap J$ **б)** $I \cup J$ **в)** $I + J \stackrel{\text{def}}{=} \{a + b \mid a \in I,\, b \in J\}$ **г)** $I * J \stackrel{\text{def}}{=} \{ab \mid a \in I,\, b \in J\}$
д) множество IJ всевозможных сумм вида $a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_ib_i$ с $a_\nu \in I$, $b_\nu \in J$
е) $\sqrt{I} \stackrel{\text{def}}{=} \{a \in A \mid \exists\, n \in \mathbb{N} : a^n \in I\}$ **ж)** множество $\mathfrak{n}(A)$ всех нильпотентов из A

А3◇3. Верно ли, что $\sqrt{IJ} = \sqrt{I \cap J} = \sqrt{I}\sqrt{J}$

А3◇4°. Будет ли полем $\mathbb{R}[x]/(f)$ для **а)** $f = x^4 + 1$, **б)** $f = x^3 + 1$, **в)** $f = x^2 + 3$?

А3◇5°. Пусть $\mathbb{F}_q$ — конечное поле. Верно ли, что любая функция $\mathbb{F} \longrightarrow \mathbb{F}$ является многочленом? Могут ли разные многочлены задавать одинаковые функции?

А3◇6. Пусть k — любое (возможно, конечное) поле. Бесконечно ли множество неприводимых многочленов в $k[x]$? Есть ли какие-нибудь ограничения на их степени?

А3◇7. Найдите все неприводимые многочлены степени $\leqslant 5$ над $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, а также все неприводимые многочлены степени 2 и число неприводимых многочленов степени 3 и 4 над $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

А3◇8. Пусть $p \in \mathbb{N}$ — простое, и $f \in \mathbb{F}_p[x]$ — неприводимый многочлен степени n. Сколько элементов в факторе $\mathbb{F}_p[x]/(f)$? Является ли он полем?

А3◇9*. Покажите, что для каждого $n \in \mathbb{N}$ и простого p имеется поле из p^n элементов.

А3◇10. Являются ли $\mathbb{Q}[x, y]$ и $\mathbb{Z}[x]$ кольцами главных идеалов?

А3◇11. Конечно ли фактор кольцо $\mathbb{Z}[x]/(f, g)$, если все общие делители f, g — это ± 1?

А3◇12. Может ли неприводимый многочлен $f \in \mathbb{Z}[x]$ степени $\geqslant 2$ иметь

а) рациональные корни? **б)** кратные комплексные корни?

А3◇13. Приводимы ли в $\mathbb{Q}[x]$ многочлены: **а)** $x^4 - 8x^3 + 12x^2 - 6x + 2$ **б)** $x^5 - 12x^3 + 36x - 12$

А3◇14*. В кольце $\mathbb{Z}[x]$ разложите на неприводимые множители или докажите неприводимость многочленов: **а)** $t^4 + t + 1$, **б)** $t^5 + t^4 + t^2 + t + 2$, **в)** $t^6 + t^3 + 1$,

Простота, максимальность и неприводимость. Идеал $\mathfrak{a} \subset A$ называется *простым* (соотв. *максимальным*), если $A/\mathfrak{a}$ не имеет делителей нуля (соотв. является полем). Элемент $a \in A$ называется *простым*, если идеал (a) прост, и *неприводимым*, если $a = rs \Rightarrow$ хотя бы один из сомножителей r, s обратим.

А3◇15°. Докажите, что собственный[1] идеал максимален, если и только если он не содержится в строго большем собственном идеале, а также что все простые элементы неприводимы.

А3◇16. В кольце формальных степенных рядов $k[[x]]$ над полем k найдите все:

а) обратимые элементы; **б)** идеалы; **в)** максимальные идеалы.

А3◇17. Найдите в кольце $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ непростой неприводимый элемент.

А3◇18. Верно ли, что в любом целостном кольце главных идеалов:

а) простота элемента равносильна его неприводимости ?
б) $\forall$ цепочки вложенных идеалов $I_1 \subset I_2 \subset \cdots\ \exists\, n : I_\nu = I_{\nu+1}$ при $\nu \geqslant n$?
в) любой элемент раскладывается в произведение конечного числа неприводимых?
г) справедлива теорема об однозначности разложения на неприводимые множители?

А3◇19. Пусть $f_1, f_2, \dots, f_s \in \mathbb{Q}[x]$ попарно взаимно просты, и $F = \prod\limits_{\nu=1}^{s} f_\nu$. Постройте изоморфизм колец $\mathbb{Q}[x]/(F) \xrightarrow{\sim} \prod\limits_{\nu=1}^{s} \mathbb{Q}[x]/(f_\nu)$ и найдите в $\mathbb{Q}[x]$ все многочлены с остатками $1 + x$, $1 + x^3$ и $1 + x^5$ от деления на $1 + x^2$, $1 + x^4$ и $1 + x^8$.

А3◇20. В кольце $\mathbb{Z}/360\mathbb{Z}$ найдите все решения уравнений **а)** $x^2 = 1$ **б)** $x^3 = 1$ **в)** $x^2 = 49$.

[1] т. е. отличный от нуля и всего кольца