Квадратичная взаимность

A$2\frac{1}{2}\diamond$1 (эйлеровы разложения). Пусть $m\in\mathbb{N}$ — нечётно. Убедитесь, что $\frac{\sin mx}{\sin x}$ является многочленом от $\sin^2 x$, найдите его степень, корни, старший коэффициент и выясните, справедливы ли тождества:

а) $\dfrac{\sin(mx)}{\sin x} = (-4)^{\frac{m-1}{2}} \prod\limits_{j=1}^{\frac{m-1}{2}} \left(\sin^2 x - \sin^2\left(\frac{2\pi j}{m}\right)\right)$; **б)** $(-1)^{\frac{m-1}{2}} \sin(mx) = 2^{m-1} \prod\limits_{j=0}^{m-1} \sin\left(x + \frac{2\pi j}{m}\right)$.

A$2\frac{1}{2}\diamond$2 (символ Лежандра - Якоби). Пусть p — простое число. Сопоставим каждому $n\in\mathbb{Z}$ число

$$\left(\frac{n}{p}\right) \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} 0\,, \text{ если } n \text{ делится на } p\,, \\ 1\,, \text{ если } n \bmod p \text{ ненулевой квадрат в } \ \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\,, \\ -1\,, \text{ если } n \bmod p \text{ не квадрат в } \ \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\,. \end{cases}$$

а) Является ли $\left(\dfrac{n}{p}\right)$ с фиксированным p мультипликативным характером числа n?

б) Вычислите $\sum\limits_{n=1}^{p-1}\left(\dfrac{n}{p}\right)$. **в)** Сравните знак $\left(\dfrac{m}{p}\right)$ со знаком $\prod\limits_{j=1}^{\frac{p-1}{2}} \dfrac{\sin\left(\frac{2\pi m}{p}\cdot j\right)}{\sin\left(\frac{2\pi}{p}\cdot j\right)}$.

A$2\frac{1}{2}\diamond$3* (квадратичный закон взаимности). Докажите, что для любых простых чисел p, q

$$\left(\frac{p}{q}\right)\cdot\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}\frac{q-1}{2}}\,.$$

Указание. Примените зад. A$2\frac{1}{2}\diamond$2в), разложив все отношения синусов по формулам из зад. A$2\frac{1}{2}\diamond$1.

A$2\frac{1}{2}\diamond$4. Найдите $\left(\dfrac{43}{109}\right)$.

A$2\frac{1}{2}\diamond$5. Как соотносятся друг с другом следующие свойства простого числа $p\in\mathbb{N}$:

а) p перестаёт быть простым в $\mathbb{Z}[i]$; **б)** -1 является квадратом в $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$;

в) p является суммой двух квадратов натуральных чисел; **г)** $p \not\equiv 3 \pmod 4$.

A$2\frac{1}{2}\diamond$6 (разложение в сумму двух квадратов). Верно ли, что натуральное число не является ни квадратом ни суммой двух квадратов, если и только если в его разложение на простые множители входит нечётная степень простого числа вида $4k+3$.

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей, факториальностью колец $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Z}[i]$ и тем, что равенство $m = a^2+b^2$ в кольце $\mathbb{Z}$ равносильно равенству $m = (a+ib)(a-ib) = z\overline{z}$ в кольце $\mathbb{Z}[i]$.