Программа экзамена по обязательному курсу Алгебра – 1

НМУ, первый курс, первый семестр, зима 2005/2006

1) Комбинаторика конечных множеств. Число инъективных, сюрьективных и взаимно однозначных (монотонных) отображений из одного конечного (упорядоченного) множества в другое. Разбиения и диаграммы Юнга. Мультиномиальные коэффициенты.

2) Поля, коммутативные кольца, гомомрфизмы, фактор-кольца и идеалы. Примеры: поле $\mathbb{C}$, кольца и поля $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, простое подполе, характеристика и гомоморфизм Фробениуса, кольца функций и гомоморфизмы поднятия и вычисления, многочлены и формальные ряды, кольца и поля вида $k[x]/(f)$, присоединение корня. Идеалы и фактор-кольца. Прямое произведение колец, взаимно простые идеалы и китайская теорема об остатках. Простые и максимальные идеалы. Конечные поля.

3) Делимость в кольцах. Простые и неприводимые элементы. Факториальные кольца, НОД. Кольцо многочленов над факториальным кольцом факториально; примеры: $\mathbb{Z}[x]$ и $k[x_1, x_2, \ldots, x_n]$. Евклидовы кольца, примеры: $\mathbb{Z}$, $k[x]$, $\mathbb{Z}[i]$, евклидовы кольца являются кольцами главных идеалов. Кольца главных идеалов факториальны.

4) Векторные пространства и матрицы. Определения и примеры векторных пространств. Линейная зависимость, базисы, размерности, координаты. Линейные замены базиса. Матричный формализм. Линейные оболочки и линейные уравнения. Двойственность.

5) Ориентированный объём и грассмановы многочлены. Ориентированный объём. Полилинейные косые формы. Определители. Алгебра многочленов от антикоммутирующих переменных: базисные мономы, правила коммутирования, знак перестановки, центр грассмановой алгебры, блочно-диагональный вид грассмановой квадратичной формы, линейная замена переменных в грассмановом многочлене. Миноры, разложение определителя по набору строк/столбцов (соотношения Сильвестра), частные производные определителя по матричным элементам.

6) Линейные операторы, собственные векторы и собственные значения. Ядро, образ, двойственность, вычисление размерностей. Отыскание собственных векторов. Характеристический многочлен. Линейная независимость собственных векторов с разными собственными значениями. Аннулирующий многочлен оператора. Разложение аннулирующего многочлена на множители и разложение пространства в прямую сумму корневых подпространств.

7) Модули над коммутативным кольцом. Образующие и соотношения. Подмодули и фактор модули. Примеры отсутствия базиса и дополнительного подмодуля. Свободные модули. Линейные отображения и матричный формализм, алгебра матриц, элементарные преобразования матриц и элементарные замены базисов. Образ линейного отображения содержит образ умножения на определитель его матрицы, тождество Гамильтона-Кэли (над произвольным коммутативным кольцом).

8) Метод Гаусса над евклидовым кольцом. Диагонализация матрицы над евклидовым кольцом элементарными преобразованиями строк и столбцов. Строение конечно порождённых модулей над евклидовым кольцом: взаимные базисы модуля и подмодуля, элементарные делители и инвариантные множители, разложение модуля в сумму свободного и циклических. Примеры: строение конечно порождённых $\mathbb{Z}$-модулей (=абелевых групп), число элементов в факторе решётки по подрешётке.

9) Формальные степенные ряды. Формальные операции над формальными рядами: сложение, умножение, обратимые элементы алгебры степенных рядов, интегрирование, дифференцирование, замена переменной и её обращение. Формальные разложения элементарных функций: рациональные функции, экспонента, логарифм, бином с произвольным показателем, корни $t(\sqrt[N]{x})$ многочленов $f \in k[[x]][t]$.

10) Алгебра симметрических функций. Формулы Виета, результант и дискриминант. Стандартные базисы модуля симметрических функций (полные, элементарные и ньютоновские симметрические функции, полиномы Шура), их производящие ряды и свойства матриц перехода.