Письменный экзамен по алгебре

для получения оценки «отлично» заведомо достаточно набрать 45 баллов

Задача 1 (3+4+3 балла). Постройте какое-нибудь поле из 9 элементов. Верно ли, что любые два таких поля изоморфны? Может ли такое поле содержаться в поле из 27 элементов?

Задача 2 (5+5 баллов). Пусть $\mathbb{F} \supset \mathbb{Q}$ — некоторое поле, $x^2 - d \in \mathbb{F}[x]$ — неприводим над $\mathbb{F}$, и

$$\mathbb{F}(d) = \frac{\mathbb{F}[x]}{(x^2 - d)} \simeq \{\alpha + \beta\sqrt{d} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{F}\}$$

соответствующее квадратичное расширение поля $\mathbb{F}$.

а) Может ли кубический многочлен без корней в $\mathbb{F}$ иметь корень в $\mathbb{F}(d)$?

б) Можно ли циркулем и линейкой построить правильный семиугольник?

Задача 3 (10 баллов). Найдите $\max \deg f$ по всем неприводимым многочленам f, делящим $x^{p^k} - x$ над полем $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ (где $p \in \mathbb{N}$ простое).

Задача 4 (10 баллов). Обозначим через $M \subset \mathbb{Q}[t]$ $\mathbb{Z}$-модуль, состоящий из всех многочленов степени $\leqslant m$, принимающих целые значения при любых целых целых значениях t. Сколько элементов в факторе $M/(M \cap \mathbb{Z}[x])$?

Задача 5 (5+5 баллов). Существует ли комплексная 2×4 - матрица с множеством 2×2 - миноров

а) $\{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

б) $\{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

(если да, то приведите явный пример такой матрицы, если нет, объясните почему).

Задача 6 (10 баллов). Верно ли, что квадратная $m \times m$ - матрица M с элементами из поля характеристики нуль нильпотентна тогда и только тогда, когда $\operatorname{tr} M^d = 0$ при $1 \leqslant d \leqslant m$?

Задача 7 (10 баллов). Для произвольных $n \times n$ - матриц A, B и любого фиксированного целого k из промежутка $1 \leqslant k \leqslant n$ рассмотрим всевозможные пары матриц A', B', которые получаются из A, B сохраняющим порядок взаимным обменом первых k столбцов из A и каких-то k столбцов в B (т. е. в B отмечаются k столбцов с номерами, скажем, $j_1 < j_2 < \ldots < j_k$ и для каждого $\mu = 1, 2, \ldots, k$ μ-тый столбец A записывается вместо j_μ-того столбца B, а j_μ-тый столбец B записывается вместо μ-того столбца A). Выразите сумму произведений $\det A' \cdot \det B'$ (отвечающих всевозможным выборам k столбцов в B) через $\det A$ и $\det B$.