Письменный экзамен по алгебре

для получения оценки «отлично» заведомо достаточно набрать 45 баллов

Задача 1 (10 баллов). Приведите пример поля из 8 элементов. Сколько всего имеется таких полей? Может ли такое поле содержать подполе из 4 элементов?

Задача 2 (10 баллов). Сколько корней имеет уравнение $x^7 = 35$ в $\mathbb{Z}/601\mathbb{Z}$?

Задача 3 (10 баллов). Матрица A размера $n \times n$ имеет ранг $n-1$. Каков ранг у её присоединённой матрицы[1] $A^\vee$?

Задача 4 (10 баллов). Выразите объём n-мерного параллелепипеда $\Pi \subset \mathbb{R}^n$ с вершинами в точках целочисленной решётки $\mathbb{Z}^n \subset \mathbb{R}^n$ через число целых точек, находящихся строго внутри самого Π, строго внутри $(n-1)$-мерных граней Π, строго внутри $(n-2)$-мерных граней Π и т. д. (мы считаем, что объём единичного целочисленного кубика равен единице)

Задача 5 (10 баллов). Для пары многочленов $A = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$ и $B = b_0x^m + b_1x^{m-1} + \dots + b_{m-1}x + b_m$ над произвольным полем образуем матрицу

$$\underbrace{\begin{pmatrix}
a_0 & \dots & \dots & a_{n-1} & a_n & & & \\
 & a_0 & \dots & \dots & a_{n-1} & a_n & & \\
 & & \ddots & & & \ddots & \ddots & \\
 & & & a_0 & \dots & \dots & a_{n-1} & a_n \\
 & & & & b_0 & \dots & b_{m-1} & b_m \\
 & & & \iddots & & \iddots & \iddots & \\
 & & \iddots & & \iddots & \iddots & & \\
 & b_0 & \dots & b_{m-1} & b_m & & & \\
b_0 & \dots & b_{m-1} & b_m & & & &
\end{pmatrix}}_{m+n}
\begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\\a\end{matrix}}\right\} m \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\\a\\a\end{matrix}}\right\} n \end{array}
\qquad (1)$$

(предполагается, что $n \geqslant m$ и $a_0, b_0 \neq 0$) и для $k = 0, 1, 2, \dots$ обозначим через d_k определитель матрицы, которая получается из (1) выкидыванием внешнего контура ширины k (т. е. по k строк и столбцов сверху, снизу, слева и справа). Как связан индекс первого ненулевого члена последовательности $d_0, d_1, d_2, \dots$ со степенью наибольшего общего делителя многочленов A и B?

Задача 6 (10 баллов). Покажите, что комплексные последовательности $\mathbb{N} \xrightarrow{\alpha} \mathbb{C}$, удовлетворяющие реккурентному уравнению $\alpha_k = r_1\alpha_{k-1} + r_2\alpha_{k-2} + \ \cdots \ + r_n\alpha_{k-n}$ с фиксированнми константами $r_1, r_2, \dots, r_n \in \mathbb{C}$, образуют n-мерное векторное пространство над $\mathbb{C}$ с базисом, состоящим из последовательностей вида $\alpha_k = \lambda^k\binom{k}{m}$ (для каждой такой последовательности $\lambda \in \mathbb{C}$ и целое m фиксированы, причём λ пробегает корни многочлена

$$x^n - r_1x^{n-1} - \ \cdots \ - r_{n-1}x - r_n\,,$$

а m меняется от нуля до кратности λ минус единица[2]).

---

[1] напомним, что $a_{ij}^\vee = (-1)^{i+j}A_{\hat{i}\hat{j}}$ есть алгебраическое дополнение к a_{ij}

[2] например, пространства решений реккурентных уравнений $\alpha_k = \alpha_{k-1} + \alpha_{k-2}$ и $\alpha_k = 2\alpha_{k-1} - \alpha_{k-2}$ двумерны с базисами $\alpha_k = \left(\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\right)^k$ и, соответственно, $\alpha_k \equiv 1$, $\alpha_k = k$