А. Л. Городенцев

Математический анализ для старших школьников

Этот курс математического анализа рассчитан на школьников 9 – 11 классов, которые (пока) не обладают познаниями выходящими за рамки стандартной программы по математике, но видят занятия математикой одним из своих важнейших жизненных приоритетов, в частности, готовы *каждый день* решать 1 - 2 *новых* задачи и обсуждать свои достижения с преподавателями и друзьями, будучи движимы при этом «одними только» молодецким задором, интересом к предмету, удовольствием от общения с себе подобными, чувством удовлетворения от *собственных* математических открытий и растущей уверенностью в собственных силах, возникающей от *самостоятельного* решения задач. Поддержание и укрепление всех этих жизнерадостных ощущений — главная задача преподавателей. Никаких других оснований, способных «убедить» нормального ребёнка освоить этот курс не существует — давление при помощи отметок не оправдано и бессмысленно, а посулы того, что этот курс поможет в сдаче каких-либо экзаменов суть обман.

Курс состоит из листков с задачами. Каждый школьник получает свой листок, решает задачи, *записывает* свои решения, отдает их на прочтение преподавателю, и затем решения обсуждаются лично с каждым школьником. Уроки, собственно, состоят из этих обсуждений — две пары сдвоенных уроков в неделю. Очень важно на *каждом* занятии поговорить с *каждым* школьником (опыт показывает, что это реально только когда на одного преподавателя приходится не более 5-7 учеников). Когда основной материал листка освоен, школьнику выдаётся следующий листок, и т. д. Скорость освоения материала у каждого ученика своя. Более сильные решают листок (в среднем) за неделю, менее сильные – за две. Если кто-то надолго «застрял» на каком-то листке, преподавателю требуется выяснить, в чём состоят проблемы, и деликатно помочь их преодолеть — самое главное не повредить при этом ни одному из перечисленных выше «стимулов» к занятиям.

Задачи, с которыми надо разобраться в первую очередь, помечены кружочком. Они обычно нетрудны и содержат базисные примеры и вводные конструкции — тут от каждого ученика следует добиваться полной ясности. Задачи помеченные звёздочкой, напротив, весьма трудны, и их решение не обязательно для понимания основного курса; предполагается, что школьник будет долго заниматься понравившейся ему трудной задачей, возможно, возвращаясь к ней потом, решив какие-то следующие листки, и применяя, соответственно, какие-то новые идеи — такого рода «длительную осаду» следует всячески поощрять. Все листки делятся на *основные* (с целыми номерами) и *дополнительные* (с дробными номерами). Хотелось бы, чтобы все ученики умели решать все непомеченные звёздочками задачи из всех основных листков. Дополнительные листки тоже выдаются всем желающим, но рассчитаны они на наиболее продвинутых школьников, значительно вырывающихся вперёд, и решать их следует параллельно решению основных листков (все дополнительные листки довольно трудны и выходят за рамки стандартных программ).

Несмотря на наличие нескольких связующих сюжетов, пронизывающих весь курс насквозь и обсуждаемых с различных точек зрения практически в каждом листке, заинтересованный преподаватель без труда сможет выделить из курса несколько автономных тем, представленных сериями из 3–5 листков, и внедрить их в свой собственный курс или использовать как отдельную тему для факультатива и/или кружка.

Почти все наши задачи и методологические приёмы не новы, я безмерно признателен всем их авторам, и приношу свои извинения за то, что я не в состоянии их перечислить, а тем более, указать точные ссылки. Множество задач происходит из «Задачника Кванта». Сюжеты про графы и вероятности практически целиком заимствованы из аналогичного курса С. А. Дориченко (см. Математ. Обр. 1997, № 1, с. 38–75); суммирование, ряды и т. п. цельнотянуты из книжки «Числа и Суммы» (см. Математ. Обр. 1999, № 2-3, с. 2–57); определённый интеграл вводится по Дьедоне так же, как в лекциях С. М. Львовского для первокурсников Независимого Унивеситета; задачи про действительные числа, общую топологию вещественной прямой и ТФДП очень близки к оригинальным листкам Н. Н. Константинова, от которых, собственно, и берёт начало тот подход к преподаванию математики, которому мы стараемся следовать.

Этот курс был пройден в одном из математических классов московской школы № 57. Это (как и само появление настоящих листков) было бы невозможно без активного участия Рины Анно, Пети Ахметьева, Серёжи Дориченко, Оли Кряжевой, Мити Михалина, Гриши Рыбникова, Жени Смирнова, Коли Степанова и Кости Трушкина. Я пользуюсь случаем горячо поблагодарить их за эту нашу совместную работу.

Содержание

9 класс

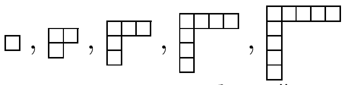
10 класс

11 класс

Геометрическое суммирование

... Достопочтеннейший Дионисий, зная что ты ревностно хочешь научиться решению задач, касающихся чисел, я попытался изложить природу их и могущество, начиная с тех оснований, на которых покоится эта наука ... Все числа, как ты знаешь, состоят из некоторого количества единиц; ясно, что они продолжаются, увеличиваясь, до бесконечности. Так вот, среди них находятся: квадраты, получающиеся от умножения некоторого числа самого на себя — число же это называется стороной квадрата; затем кубы ... Каждое из возрастающих от единицы чисел, начиная с трёх, является первым после единицы многоугольником и имеет столько углов, сколько в нём содержится единиц, стороной же его будет 2. Так, 3 будет треугольником, 4 — четырёхугольником, 5 — пятиугольником и т. д.

из книги Диофанта Александрийскго «Арифметика»
и его же учения «О многоугольных числах»

M1◇1. Рассмотрим последовательность  , . . . (древние греки называли Г-образные фигурки *гномонами*). Сколько клеток в k-той фигурке и чему равна суммарная площадь первых k гномонов?

M1◇2. Чему равно k-е нечётное число и сумма первых k нечётных чисел? Чему равно k-е чётное число и сумма первых k чётных чисел? Вычислите суммы 300 нечётных чисел, начиная с 57 и 200 чётных чисел, начиная с 444.

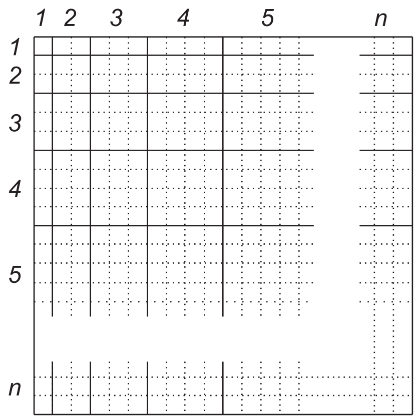
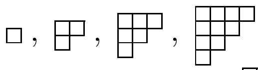
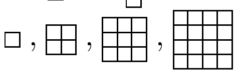


Рис. 1 - 1. Пифагорова таблица умножения чисел от 1 до n.

M1◇3. Треугольные числа Диофанта:  — это 1, 3, 6, 10, ... Четырёхугольные числа:  — это квадраты. Сложите из двух последовательных треугольных чисел квадрат. Чему равно $T_n + T_n$? Выразите T_n через n.

M1◇4. Найдите сумму первой тысячи натуральных чисел.

M1◇5° **(пифагорова таблица умножения).** Докажите, что $mk = km$, т. е. что $\underbrace{k + k + \cdots + k}_{m} = \underbrace{m + m + \cdots + m}_{k}$. Каковы размеры и площадь таблицы на рис. 1 - 1?

M1◇6. Сколько клеток в k-том, считая от левого верхнего угла пифагоровой таблицы, «толстом» гномоне, вершина которого представляет k^2, а стороны суть произведения k на 1, 2, . . . , $(k-1)$?

M1◇7. Сформулируйте и докажите теорему, описывающую явление:

$$3 + 5 = 2^3\,,\ 7 + 9 + 11 = 3^3\,,\ 13 + 15 + 17 + 19 = 4^3\,,\ \ldots$$

M1◇8. Вычислите суммы:

а) $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3$; **б)** $T_1 + 2\,T_2 + \cdots + n\,T_n$;

в***)** $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$; **г*****)** $T_1 + T_2 + \cdots + T_n$.

M1◇9***.** Вычислите суммы квадратов первых n чётных чисел и первых n нечётных чисел.

M1◇10. Пятиугольные числа Диофанта: $P_1 = 1$, $P_2 = 5$, $P_3 = 12$, $P_4 = 22$, . . . изображены на рис. 1 - 2. Чему равно $P_k - P_{k-1}$? Выразите P_n через n.

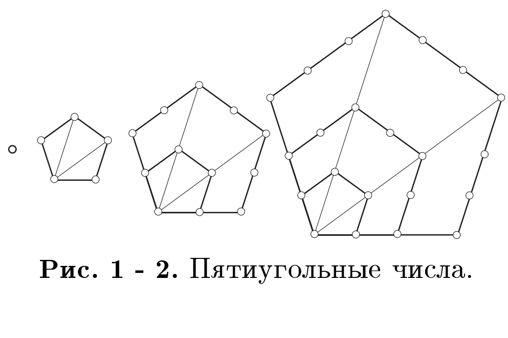


Рис. 1 - 2. Пятиугольные числа.

Суммирование разностей

Арифметическая прогрессия — это (конечный или бесконечный) набор $\ldots, a_1, a_2, a_3, \ldots$ занумерованных чисел, в котором разность $d = a_k - a_{k-1}$ между двумя соседними числами одинакова для всех k; она называется *разностью* или *приращением* прогрессии.

М2◇1°. Будет ли арифметической прогрессией последовательность с k-тым членом, равным:
а) $\underbrace{11\ldots1}_{k}$, **б)** $\dfrac{1+2+\cdots+k}{k}$, **в)** k-тому натуральному числу, оканчивающемуся на 13?

М2◇2°. Выразите n-тый член произвольной арифметической прогрессии через первый член и разность. Чему равно 91-е натуральное число, большее 444, с остатком 43 от деления на 57?

М2◇3. В некой арифметической прогрессии $a_m = -a_n$ для каких-то $m < n$. При каких m, n эта прогрессия содержит нуль и под каким номером?

М2◇4°. Какие из перечисленных ниже свойств набора чисел $a_0, a_1, \ldots, a_n$ необходимы, а какие — достаточны для того, чтобы этот набор был арифметической прогрессией?
а) любой элемент (кроме крайних), есть среднее арифметическое двух соседних;
б) $2\,a_i = a_{i-2} + a_{i+2}$ при всех $2 \leqslant i \leqslant n-2$; **в)** $a_i = 2\,a_{i-1} - a_{i-2}$ при всех $2 \leqslant i \leqslant n$;
г) сумма $a_i + a_{n-i}$ одна и та же для всех $0 \leqslant i \leqslant n$.

М2◇5°. Выразите сумму всех элементов конечной арифметической прогрессии[1]
а) через два крайних члена и количество слагаемых;
б) через начальный член, количество слагаемых и приращение.

М2◇6. Найдите сумму всех трёхзначных чисел с остатком 7 от деления на 43.

М2◇7. По строкам и столбцам прямоугольной таблицы размера $m \times n$ стоят арифметические прогрессии. Найдите сумму всех чисел в таблице, если сумма четырёх угловых равна S.

М2◇8. Как связаны арифметические прогрессии с m-угольными числами Диофанта? Чему равно n-тое m-угольное число?

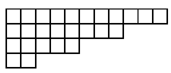
М2◇9*. Можно ли разбить множество натуральных чисел $\mathbb{N}$ в объединение (возможно, бесконечного) набора попарно непересекающихся бесконечных арифметических прогрессий с разностями $d_1, d_2, \ldots$, удовлетворяющими неравенству $1/d_1 + 1/d_2 + \cdots < 0,9$?

Суммирование разностей. Часто сумму $b_1 + b_2 + \cdots + b_n$ удаётся вычислить, представив каждое слагаемое в виде разности $b_i = c_{i+1} - c_i$ чисел некоего другого набора $c_1, c_2, \ldots, c_{n+1}$. Более общим образом эта идея выглядит так: заменим каждое b_i подходящей суммой $b_i = \pm c_{i1} \pm c_{i2} \pm \cdots \pm c_{im_i}$ так, чтобы при подстановке в исходную сумму $b_1 + b_2 + \cdots + b_n$ бóльшая часть c_{ij} либо сокращалась, либо легко складывалась.

М2◇10. Вычислите суммы: **а)** $\dfrac{1}{1\cdot2} + \dfrac{1}{2\cdot3} + \cdots + \dfrac{1}{n\,(n+1)}$; **б)** $1\cdot2 + 2\cdot3 + \cdots + n\,(n+1)$;
в) $\dfrac{1}{a_1a_2} + \dfrac{1}{a_2a_3} + \cdots + \dfrac{1}{a_{n-1}a_n}$ ($a_1, a_2, \ldots, a_n$ – арифметическая прогрессия с разностью d);
г) $\dfrac{1}{1\cdot2\cdot3} + \dfrac{1}{2\cdot3\cdot4} + \cdots + \dfrac{1}{n\,(n+1)\,(n+2)}$; **д)** $1\cdot2\cdot3 + 2\cdot3\cdot4 + \cdots + n\,(n-1)\,(n+2)$;
е) $\dfrac{1}{1\cdot2\cdot3\cdot4} + \dfrac{1}{2\cdot3\cdot4\cdot5} + \cdots + \dfrac{1}{n\,(n+1)\,(n+2)\,(n+3)}$.

М2◇11. Выразите $(n+1)^k$ и разность $(n+1)^k - n^k$ в виде многочленов от n при $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

М2◇12. Пользуясь предыдущей задачей, вычислите сумму k-тых степеней первых n натуральных чисел для $k = 0, 1, 2, 3, 4$.

[1] на клетчатой бумаге прогрессию, скажем, $2, 5, 8, 11$, удобно рисовать в виде 

НОД, НОК и деление с остатком

В решениях задач этого листка словосочетания «простое число» и «простые множители» запрещены.

Прошу — забудь всё, чему ты учился в школе; потому что ты этому не научился.
(Э. Ландау, «Основы анализа»)

М3◇1°. Какое наименьшее расстояние можно отложить от данной точки на прямой, пользуясь двумя шаблонами (без делений) длины **а)** 13 *см* и 29 *см*; **б)** 21 *см* и 30 *см*?

М3◇2. Пусть $A, B \in \mathbb{Z}$ — два фиксированных целых числа. Обозначим через $\mathfrak{I} \subset \mathbb{Z}$ множество всех чисел n, которые можно отложить на числовой прямой от нуля, используя шаблоны[1] A и B. Пусть D — это *наименьшее положительное* число в $\mathfrak{I}$. Верно ли, что:

а) A, B, а также суммы, разности и любые целые кратные чисел из $\mathfrak{I}$ лежат в $\mathfrak{I}$?

б) Все числа из $\mathfrak{I}$ (в частности, A и B) нацело делятся на D?

в) Все числа из $\mathfrak{I}$ (в частности, D) нацело делятся на любой общий делитель чисел A и B?

НОД и НОК. Наибольшее натуральное число D, которое делит каждое из чисел $A_1, A_2, \ldots, A_n$, называется их *наибольшим общим делителем* и обозначается $\text{нод}(A_1, A_2, \ldots, A_n)$. Аналогично, наименьшее натуральное число K, которое делится на все числа A_i называется их *наименьшим общим кратным* и обозначается $\text{нок}(A_1, A_2, \ldots, A_n)$.

М3◇3. Рассуждая как в зад. М3◇2, покажите, что $\text{нод}(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ делится нацело на любой другой общий делитель чисел $A_1, A_2, \ldots, A_n$ и представляется в виде $z_1A_1 + z_2A_2 + \cdots + z_nA_n$ с целыми z_ν. Верно ли, что $\text{нод}(A \pm B, B) = \text{нод}(A, B)$?

М3◇4. Докажите, что $\text{нок}(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ делит нацело любое другое общее кратное чисел A_i и что $\text{нок}(A, B) \cdot \text{нод}(A, B) = A \cdot B$.

М3◇5 (алгоритм Евклида). Пусть $A > B$ — два фиксированных натуральных числа. Определим последовательность чисел E_0, E_1, E_2, E_3, ... правилами: $E_0 = A$, $E_1 = B$, $E_k =$ (остатку от деления E_{k-2} на E_{k-1}) при $k \geqslant 2$. Докажите, что все числа E_ν лежат в множестве $\mathfrak{I}$ из зад. М3◇2 и монотонно убывают до тех пор, пока очередное $E_{\nu+1}$ не обратится в нуль (т. е. пока $E_{\nu-1}$ не разделится нацело на E_ν). Как связано это последнее ненулевое E_ν с $\text{нод}(A, B)$?

М3◇6. Вычислите $\text{нод}(A, B)$ и подберите целые x, y так, чтобы $x\,A + y\,B = \text{нод}(A, B)$, для следующих пар (A, B): **а)** $(17, 13)$; **б)** $(44\,863, 70\,499)$; **в)** $(8\,385\,403, 2\,442\,778)$.

Взаимная простота. Если $\text{нод}(a, b) = 1$ для $a, b \in \mathbb{Z}$, то числа a, b называются *взаимно простыми*.

М3◇7. Докажите, что взаимная простота a и b равносильна существованию таких $x, y \in \mathbb{Z}$, что $a\,x + b\,y = 1$, и равносильна возможности представить любой $z \in \mathbb{Z}$ в виде $z = a \cdot k + b \cdot m$ с подходящими $k, m \in \mathbb{Z}$.

М3◇8. Пусть c взаимно просто с a, а b – любое. Докажите, что

а) если произведение ab делится на c, то b делится на c;

б) если b делится как на a, так и на c, то b делится и на произведение ac.

М3◇9. Верно ли, что несократимая дробь p/q (где $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$) может быть корнем многочлена $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$ с целыми коэффициентами, только если $a_0 \,\vdots\, q$ и $a_n \,\vdots\, p$?

М3◇10. Верно ли, что $\text{нок}(a, b)/a$ и $\text{нок}(a, b)/b$ взаимно просты при любых $a, b \in \mathbb{N}$?

М3◇11. Верно ли, что $\forall\, a \in \mathbb{N}$ существует бесконечно много $b \in \mathbb{N}$, таких что $b + a$ и $b - a$ взаимно просты? Всегда ли взаимно просты a и $a + 1$?

М3◇12. Найдите *все* целые решения уравнений:

а) $1537\,x + 1387\,y = 1$ **б)** $5\,x + 7\,y = 11$ **в)** $26\,x + 32\,y = 60$ **г)** $169\,x + 221\,y = 26$

М3◇13. Чему равно k-е натуральное число, одновременно дающее остатки:

а) 1, 2, 3 от деления, соответственно, на 2, 3 и 5?

б) 2, 4, 6, 8 от деления, соответственно, на 5, 9, 11 и 14?

---

[1] иначе говоря, $\mathfrak{I}$ состоит из всех чисел n, представимых в виде $n = k\,A + m\,B$ с целыми k и m

Равносоставленность и площади

М4◇1. Нарисуйте на листе клетчатой бумаги оси координат и отметьте точки $A(-2,0)$, $B(2,0)$, $C(2,2)$, $D(2,5)$, $E(0,5)$, $F(-7,7)$, $G(-5,4)$. Допустим, что на закрашивание одной клетки тратится 1 пиколитр чернил. Сколько чернил уйдёт на закрашивание многоугольников: CED, ADE, AEC, ECG, $ABDE$, $GCEF$, $ACEFG$?

М4◇2. Рассмотрим на координатной плоскости точки $O(0,0)$ и $A(4,3)$. Достройте отрезок OA до квадрата $OABC$ и вычислите $S(OABC)$ и $|OA|$.

М4◇3. Чему равен квадрат расстояния от начала координат до произвольной точки P с координатами (p_1, p_2) и чему равен квадрат расстояния между P и другой произвольной точкой $Q(q_1, q_2)$?

М4◇4. Нарисуйте ГМТ с координатами (x, y), удовлетворяющими соотношениям:
а) $x^2 + y^2 = 1$ **б)** $(x-3)^2 + (y+5)^2 = 16$ **в)** $x^2 + y^2 + 1 = 2\,(y - 3\,x)$

М4◇5. Вершины параллелограмма $ABCD$ имеют координаты $A(1,5)$, $B(-3,2)$, $C(4,-1)$. Найдите координаты вершины D и $S(ABCD)$.

М4◇6*. Вершины параллелограмма $OAPB$ имеют координаты $O(0,0)$, $A(a_1, a_2)$ и $B(b_1, b_2)$. Выразите координаты вершины P и $S(OAPB)$ через a_1, a_2, b_1 и b_2.

Свойства площадей. Многие плоские фигуры $\mathfrak{F}$ имеют площадь $S(\mathfrak{F})$. Например, площадь прямоугольника со сторонами a и b равна ab. Площади равных фигур равны. Фигуры равной площади называются *равновеликими*. Если фигура $\mathfrak{F}$ разрезана прямолинейным разрезом на две части $\mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F}_2$ и из трёх фигур $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$ какие-то две имеют площадь, то её имеет и третья, причём $S(\mathfrak{F}) = S(\mathfrak{F}_1) + S(\mathfrak{F}_2)$. Две фигуры называются *равносоставленными*, если одну из них можно конечным числом прямолинейных разрезов разбить на части, из которых складывается другая фигура. Площади равносоставленных фигур равны.

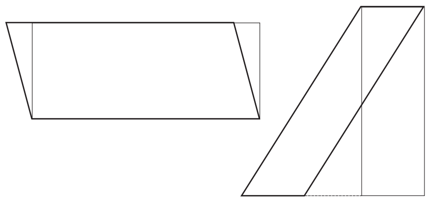


Рис. 4 - 1. Параллелограммы и прямоугольники.

М4◇7. Равновелики ли параллелограммы соответствующим им на рис. 4 - 1 прямоугольникам? Выразите площади этих параллелограммов через основания и высоты.

М4◇8. Выразите площади треугольника и трапеции через высоты и основания.

М4◇9. Существует ли треугольник с высотами h_1, h_2, периметром P и площадью S, такой что:
а) $P > 1\,\textit{м}$, $S < 1\,\textit{см}^2$? **б)** $S > 1\,\textit{м}^2$, $P < 1\,\textit{см}$? **в)** $h_1 \geqslant 1\,\textit{м}$, $h_2 \geqslant 1\,\textit{м}$, $S \leqslant 1\,\textit{см}^2$?

М4◇10. Пусть длины последовательных сторон (скажем, по часовой стрелке) произвольного выпуклого четырёхугольника равны a, b, c, d. Может ли его площадь быть больше, чем
а) $(ab + cd)/2$? **б)** $(ac + bd)/2$?

М4◇11. Выразите площадь произвольного четырёхугольника с перпендикулярными диагоналями через длины диагоналей.

М4◇12. Выразите площадь треугольника через длины сторон и радиус
а) вписанного **б)** вневписанного круга.

М4◇13. Зависит ли сумма расстояний от точки, лежащей внутри правильного треугольника, до его сторон от выбора этой точки?

М4◇14. Верно ли, что медианы разрезают треугольник на 6 равновеликих треугольников?

М4◇15*. Треугольник разрезали на три меньших, соединив вершины с некой внутренней точкой. Верно ли, что они равновелики только если эта точка — пересечение медиан?

Геометрия на клетчатой бумаге

М$4\frac{1}{2}\diamond 1^*$. Математический бильярд — это квадрат $ABCD$ с точечными лузами в вершинах. Точечный шар выпустили из середины стороны AD в направлении точки E, которая делит противоположную сторону в отношении $BE : EC = 43 : 57$. Попадёт ли он когда-нибудь в лузу? Если нет – почему, если да – после скольких отражений[1] от стенок?

М$4\frac{1}{2}\diamond 2^*$. Существует ли параллелограмм площади 4 кл. с центром в узле клетчатой бумаги, не содержащий никаких других узлов ни внутри, ни на границе?

Формула Пика сопоставляет любому (не обязательно выпуклому) несамопересекающемуся многоугольнику $\mathfrak{M}$ с вершинами в узлах клетчатой бумаги число

$$\Pi(\mathfrak{M}) \stackrel{\text{def}}{=} (\text{ число узлов внутри } \mathfrak{M}\,) + \frac{1}{2}(\text{ число узлов на границе } \mathfrak{M}\,) - 1\,.$$

и утверждает, что $S(\mathfrak{M}) = \Pi(\mathfrak{M})$. Она доказывается в следующих двух задачах:

М$4\frac{1}{2}\diamond 3$. Многоугольник $\mathfrak{M}$ разрезали прямолинейным разрезом на два многоугольника $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$ тоже с вершинами в узлах. Верно ли, что $\Pi(\mathfrak{M}) = \Pi(\mathfrak{M}_1) + \Pi(\mathfrak{M}_2)$?

М$4\frac{1}{2}\diamond 4$. Последовательно докажите формулу Пика для:

а) прямоугольника со сторонами по линиям клеток;

б) для прямоугольного треугольника с катетами по линиям клеток;

в) для любого треугольника; **г)** для выпуклого многоугольника; **д*)** в общем виде.

М$4\frac{1}{2}\diamond 5$. Может ли треугольник с площадью 1 кл. и вершинами в узлах содержать узлы строго внутри себя? Может ли он иметь сколь угодно большой периметр?

М$4\frac{1}{2}\diamond 6$. Верно ли, что любой отрезок с концами в узлах, но не содержащий узлов внутри себя, можно достроить до треугольника площади 1 кл. с вершинами в узлах?

М$4\frac{1}{2}\diamond 7$. Может ли параллелограмм с площадью 1 кл. и вершинами в узлах накрывать какие-либо узлы кроме вершин? Может ли расстояние между наиболее удалёнными друг от друга вершинами такого параллелограмма быть сколь угодно большим?

М$4\frac{1}{2}\diamond 8$. Прямая ℓ соединяет узлы с координатами $(0,0)$ и (p,q), причём между этими узлами на прямой ℓ нет других узлов. Есть ли среди не лежащих на ℓ узлов ближайшие к ней и много ли их может быть? Найдите расстояние от такого узла до прямой ℓ.

М$4\frac{1}{2}\diamond 9$ (задача о кузнечиках). Трёх кузнечиков посадили в точки с координатами $(0,1)$, $(1,1)$ и $(1,0)$ и позволили прыгать друг через друга в первом квадранте по следующему правилу: в каждый момент один из векторов, соединяющих начало координат с кузнечиками, находится между двумя другими, и любой из двух «крайних» кузнечиков может центрально симметрично отразиться от этого «среднего». Покажите, что:

а) начало координат и кузнечики всегда находятся в вершинах параллелограмма единичной площади, и никаких других целых точек этот параллелограмм не накрывает;

б) кузнечики могут побывать только в точках с взаимно простыми координатами;

в) для каждой точки с взаимно простыми координатами имеется единственный способ прыгания, приводящий одного из кузнечиков в эту точку.

М$4\frac{1}{2}\diamond 10^*$. Каждый узел клетчатой бумаги накрыли кругом, центр которого находится в этом узле а радиус в 1999^{2000} раз меньше ширины клеток. Можно ли из начала координат выпустить луч, не пересекающий ни одного (кроме накрывающего начало) круга?

М$4\frac{1}{2}\diamond 11$. Пусть p_1, p_2 — любые, а q_1, q_2 — положительные числа. Опишите все случаи, когда $\dfrac{p_1}{q_1} + \dfrac{p_2}{q_2} = \dfrac{p_1+p_2}{q_1+q_2}$. Какими неравенствами связаны эти три дроби в остальных случаях?

[1] предполагается, что при каждом ударе о стенку «угол падения равен углу отражения»

Важные квадратичные соотношения

M5◇1. Пользуясь тем, что из четырёх одинаковых прямоугольных треугольников с катетами a, b и гипотенузой c можно сложить квадрат как на рис. 5 - 1, докажите, что $a^2 + b^2 = c^2$.

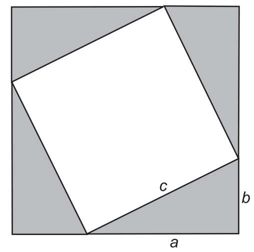


Рис. 5 - 1.

M5◇2. Докажите, что у пифагоровых штанов на рис. 5 - 2 квадрат гипотенузы равносоставлен сумме квадратов катетов (этот факт известен как *теорема Пифагора*).

Среднее геометрическое (или среднее пропорциональное) двух положительных чисел m и n — это такое положительное число q, что $q^2 = mn$ (или иначе $n : q = q : m$).

M5◇3. Докажите, что если положительные числа a, b, c удовлетворяют условию $c^2 = a^2+b^2$, то можно построить единственный треугольник со сторонами a, b и c, и этот треугольник автоматически будет прямоугольным.

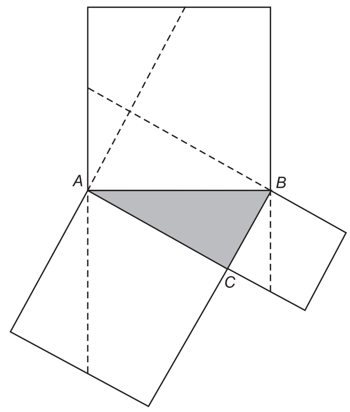


Рис. 5 - 2.

M5◇4. Докажите, что на рис. 5 - 3 квадрат высоты прямоугольного треугольника равносоставлен прямоугольнику, стороны которого суть отрезки, на которые высота разбивает гипотенузу.

M5◇5. Докажите, что на рис. 5 - 4 квадрат катета равносоставлен прямоугольнику, стороны которого суть гипотенуза и её отрезок, заключённый между этим катетом и высотой.

M5◇6. Двумя способами — с помощью предыдущих задач и через подходящие подобные треугольники — выясните, выполняются ли в произвольном прямоугольном $\triangle ABC$ с гипотенузой AB и высотой CH соотношения:

а) $|AH| : |CH| = |CH| : |HB|$ **б)** $|AH| : |AC| = |AC| : |AB|$
в) $|BH| : |CB| = |CB| : |AB|$

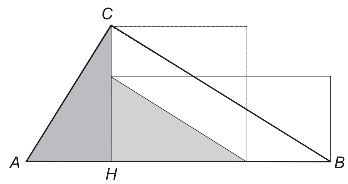


Рис. 5 - 3.

M5◇7. Глядя на рис. 5 - 5 циркулем и линейкой постройте арифметическое и геометрическое средние двух отрезков $a = AP$ и $b = PB$. Докажите, что геометрическое среднее двух положительных чисел не превосходит арифметического, и опишите все случаи их равенства.

M5◇8. Даны отрезок длины 1 и отрезок длины a. Циркулем и линейкой постройте отрезок, длина которого равна

а) $\sqrt{3}$ **б)** $\sqrt{19}$ **в)** $\sqrt{a}$ **г)** a^2.

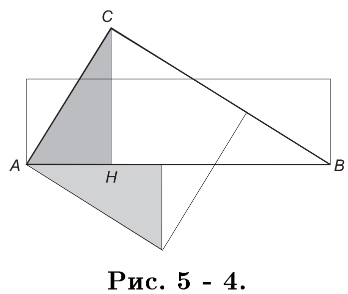


Рис. 5 - 4.

M5◇9. Циркулем и линейкой постройте квадрат, площадь которого относится к площади данного как $m : n$.

M5◇10. Даны отрезки длины 1, p и q. Циркулем и линейкой постройте корни уравнений $x^2 + p\,x - q = 0$ и $x^2 - p\,x - q = 0$.

M5◇11. Докажите, что в любом $\triangle ABC$ с высотой AH выполнено соотношение $|AB|^2 - |AC|^2 = |BH|^2 - |CH|^2$.

M5◇12. Выразите через длины сторон параллелограмма сумму квадратов длин его диагоналей.

M5◇13. Выразите диаметр круга, вписанного в равнобокую трапецию, через её основания.

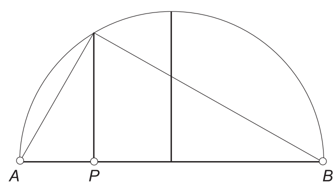


Рис. 5 - 5.

M5◇14. В произвольном треугольнике выразите через его стороны

а) медиану **б)** высоту **в*)** биссектрису **г*)** площадь

Геометрические прогрессии

В банке живут бактерии и каждый день их число удваивается, так что за неделю банка заполняется бактериями целиком. За сколько дней бактерии заполнят полбанки?

Геометрическая прогрессия — это (конечный или бесконечный) набор занумерованных *ненулевых* чисел $\ldots$, g_1, g_2, g_3, $\ldots$, в котором отношение $q = g_k/g_{k-1}$ между двумя соседними числами одинаково для всех k; оно называется *знаменателем* прогрессии.

M6◇1°. Будет ли геометрической прогрессией последовательность, k-тый член которой равен: **а)** $0,\underbrace{0\ldots0}_{k}3$; **б)** 3^{-k}; **в)** $\underbrace{33\ldots3}_{k}$; **г)** $\sqrt[k]{3}$; **д)** $g'_k \cdot g''_k$, где g'_k, g''_k – геометрические прогрессии; **е)** ϑ^{a_k}, где $\vartheta \neq 0$, и a_k — арифметическая (скажем, целочисленная) прогрессия.

M6◇2. Можно ли разбить $\mathbb{N}$ в объединение **а)** конечного **б)** бесконечного набора попарно непересекающихся бесконечных геометрических прогрессий?

M6◇3. Какие из перечисленных ниже свойств набора положительных чисел $g_0, g_1, \ldots, g_n$ необходимы, а какие достаточны для того, чтобы этот набор был геометрической прогрессией?
а) любой элемент (кроме крайних) есть среднее геометрическое двух соседних;
б) $g_i^2 = g_{i-2}g_{i+2}$ при всех $2 \leqslant i \leqslant n-2$; **в)** $g_i g_{n-i}$ одинаково для всех $0 \leqslant i \leqslant n$.

M6◇4. Верно ли, что $a^m - b^m$ делится на $(a-b)$, буде эта разность ненулевая? Если да, то чему равно частное? Что можно утверждать про $a^m + b^m$?

M6◇5. Вычислите сумму $1 + x + x^2 + \cdots + x^n$. Обобщение: выразите сумму всех элементов конечной геометрической прогрессии через начальный член, количество слагаемых и знаменатель.

M6◇6. Найдите суммы: **а)** $1+2\,q+3\,q^2+\cdots+(n+1)\,q^n$ **б)** $1\cdot2+2\cdot3\,q+3\cdot4\,q^2+\cdots+(n+1)(n+2)\,q^n$.

M6◇7. Из пункта A в пункт B со скоростью 5 км/час вышел Толя, а через три часа вслед за ним со скоростью 7 км/час отправился Коля и – со скоростью 12 км/час – его собачка Жучка, которая догнала Толю, мгновенно развернулась и побежала назад к Коле, встретив его, снова развернулась и снова догнала Толю и т. д. Какое расстояние пробежит Жучка пока Коля догонит Толю? Какая прогрессия при этом просуммировалась?

M6◇8. Догнав Толю, Коля стал делиться с ним завтраком: в первую минуту он разделил его пополам и успел съесть треть своей половины, а Толя свою – целиком. В следующие полминуты Коля разделил пополам остатки своей доли и опять успел съесть треть, а Толя – всё. Далее процесс повторялся (и каждая следующая стадия происходила вдвое быстрее предыдущей). Через какое время завтрак будет съеден и какая его часть достанется Коле, а какая – Толе?

M6◇9. Назовём *суммой* бесконечной убывающей положительной геометрической прогрессии g_0, g_1, g_2, $\ldots$ наименьшее число, большее любой конечной суммы $g_0 + \cdots + g_n$. Докажите, что такое число существует и выразите его через начальный член и знаменатель прогрессии.

M6◇10. К большему катету прямоугольного треугольника со сторонами 1, 2, $\sqrt{3}$ подклеили равную ему по длине гипотенузу подобного треугольника. Затем к большему катету второго треугольника аналогичным образом подклеили гипотенузу третьего треугольника, подобного первым двум, и так далее до бесконечности. Чему равна площадь получающегося завитка?

M6◇11. Всегда ли при делении натуральных чисел «уголком» получится либо конечная, либо бесконечная *периодическая* десятичная дробь? Можно ли таким образом получить дроби **а)** $0,575757\ldots$; **б)** $19,9919991999\ldots$; **в)** $2,43575757\ldots$?

M6◇12. Докажите, что периодическая дробь $\overline{0,a_1\ldots a_n\,b_1\ldots b_m\,b_1\ldots b_m\,\ldots}$ есть результат деления числа $\overline{a_1\ldots a_n\,b_1\ldots b_m} - \overline{a_1\ldots a_n}$ на число $\underbrace{9\ldots9}_{m}\underbrace{0\ldots0}_{n}$.

Как организовать полный перебор

Чтобы управиться с классом, его надо выстроить по росту и перекликнуть по алфавиту.
(из Школьных Заповедей)

М7◇1. Сколько различных **а)** двух- **б)** четырёх- **в)** n-буквенных слов[1] можно написать тридцатью тремя буквами русского алфавита?

М7◇2. Можно ли закодировать русский алфавит азбукой Морзе так, чтобы каждая буква передавалась не более, чем четырьмя сигналами? Какое число сигналов на символ достаточно отводить для передачи 3000 различных иероглифов?

М7◇3. Сколько всего разных слов (не обязательно осмысленных) можно получить переставляя буквы в словах `ОК, рок, урок, шнурок`?

М7◇4. Как изменится ответ в зад. М7◇1, если потребовать, чтобы буквы не повторялись?

М7◇5. Можно ли упорядочить все сто двухразрядных чисел от 00 до 99 так, чтобы каждые два соседних числа отличались ровно в одной цифре, причём ровно на единицу? Тот же вопрос про трёх- и n-разрядные числа.

Факториалы. Произведение $n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\dots\cdot 1$ обозначается $n!$ (читается «n-факториал»). По определению, $\boxed{0! = 1! = 1}$.

М7◇6. При каких n: **а)** $n! \geqslant 3^n$; **б)** $2^n \geqslant n^3$?

Математическая индукция — это способ доказать бесконечную серию занумерованных утверждений за два хода: **(1)** – *база индукции* – доказывается утверждение №1 ; **(2)** – *индуктивный переход* – доказывается, что при любом n из утверждения №n вытекает утверждение №$(n+1)$.

М7◇7. Верно ли, что при разрезании выпуклого n-угольника на треугольники по диагоналям число получившихся треугольников будет одним и тем же, как бы не резали? Чему оно может равняться? Какова сумма внутренних углов выпуклого n-угольника?

М7◇8. На сколько кусков разбивается плоскость n прямыми, никакие три из которых не пересекаются в одной точке и никакие две не параллельны?

М7◇9. Всегда ли плоскость, разбитая на части прямыми и окружностями, раскрашивается в два цвета так, чтобы имеющие общую сторону куски были разноцветными?

М7◇10*. Даны n точек. Верно ли, что они либо лежат на одной прямой, либо их соединяет не менее n разных прямых?

М7◇11. Сколько разных m-буквенных слов можно написать n-буквенным алфавитом, если буквы в словах **а)** могут **б)** не могут повторяться?

М7◇12. В бесконечный лабиринт на рис. 7 - 1 падает шарик и под действием тяжести проваливается вниз, случайным образом поворачивая налево-направо. На на каждой из комнат верхних 11 этажей напишите, сколькими различными путями шарик может до неё добраться.

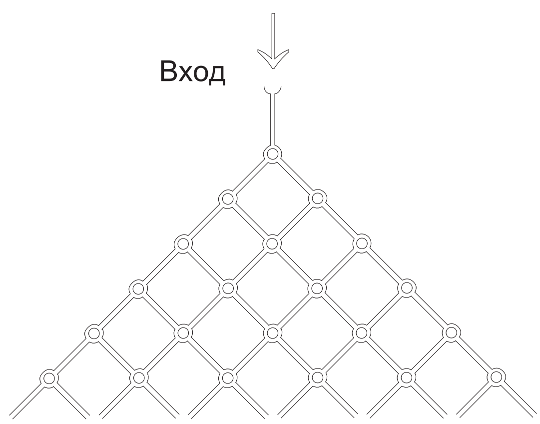


Рис. 7 - 1. Лабиринт Паскаля.

М7◇13. Для $k = 0, 1, 2, \dots, 10$ раскройте скобки и приведите подобные слагаемые в $(1+x)^k$ и $(a+b)^k$. Сформулируйте и докажите теорему, сравнивающую полученные ответы с ответами зад. М7◇12.

М7◇14. Число $x + 1/x$ является целым. Будет ли целым $x^n + 1/x^n$? (Начните с $n = 2, 3, \dots$)

[1] слова не обязаны быть осмысленными и буквы в словах могут повторяться

Знакомьтесь, граф ...

Граф — это конечное множество точек на плоскости (*вершин графа*), некоторые из которых соединены отрезками (*рёбрами графа*). Количество выходящих из данной вершины A рёбер называется *степенью* вершины и обозначается $\deg A$.

М$7\frac{1}{2}$◇1 (лемма о рукопожатиях). Выразите сумму степеней всех вершин произвольного графа через общее число его рёбер.

М$7\frac{1}{2}$◇2. В любом ли графе с более чем одной вершиной есть пара вершин одинаковой степени?

М$7\frac{1}{2}$◇3. Все 28 Петиных одноклассников имеют по различному числу друзей в этом классе. Сколько из них дружит с Петей?

М$7\frac{1}{2}$◇4 (уроки демократии - 1). Каждый из 450 думцев врезал по физиономии ровно одному своему коллеге. Наберётся ли 150 думцев, из которых никто никого по лицу не бил?

М$7\frac{1}{2}$◇5* (теорема Холла). В некой компании n юношей и при каждом $k = 1, 2, \ldots, n$ для любых k юношей в этой компании найдётся не менее k девушек, знакомых хотя бы с одним из рассматриваемых k юношей. Можно ли просватать всех юношей за знакомых девушек?

Путь в графе — это последовательность его вершин $A_1, A_2, \ldots, A_{n+1}$ и рёбер $[A_1, A_2], \ldots, [A_n, A_{n+1}]$, соединяющих соседние вершины в этой последовательности; число n называют *длиной* пути. Если все рёбра пути различны и начальная вершина совпадает с конечной: $A_1 = A_{n+1}$, то путь называют *циклом*. Граф называют *связным*, если любые две его вершины можно соединить путём. Связный граф без циклов называется *деревом*.

М$7\frac{1}{2}$◇6°. Нарисуйте какое-нибудь дерево. Пусть между любыми двумя вершинами графа имеется ровно один путь из неповторяющихся рёбер. Является ли это условие

а) необходимым **б)** достаточным для того, чтобы граф был деревом?

М$7\frac{1}{2}$◇7°. Как связаны число вершин и число рёбер произвольного дерева?

М$7\frac{1}{2}$◇8° (остовы). Всегда ли из связного графа можно удалить несколько рёбер так, чтобы осталось дерево с тем же множеством вершин, что и исходный граф[1]?

М$7\frac{1}{2}$◇9* (теорема Кели). Докажите, что полный[2] граф с n вершинами имеет n^{n-2} остовов.

М$7\frac{1}{2}$◇10°. Всегда ли в связном графе можно удалить некоторую вершину вместе со всеми выходящими из неё рёбрами так, чтобы он остался связным?

М$7\frac{1}{2}$◇11. Могут ли степени всех вершин несвязного n-вершинного графа быть $\geqslant (n-1)/2$?

М$7\frac{1}{2}$◇12. Из столицы выходит 101 авиалиния, из г. Дальний — одна, а из остальных городов — по 100. Можно ли, пусть с пересадками, долететь из столицы в Дальний?

М$7\frac{1}{2}$◇13 (эйлеровы графы). Докажите, что в связном графе тогда и только тогда есть цикл, проходящий ровно один раз по каждому рёбру, когда степени всех вершин чётны.

Плоские графы — это графы, рёбра которых не пересекают друг друга нигде кроме вершин. Части, на которые делит плоскость такой граф, называются *гранями графа*.

М$7\frac{1}{2}$◇14. Докажите, что грани плоского графа тогда и только тогда раскрашиваются в два цвета так, чтобы грани с общим ребром получались разноцветными, когда этот граф эйлеров (см. зад. М$7\frac{1}{2}$◇13).

М$7\frac{1}{2}$◇15. Многоугольник разрезают на треугольники непересекающимися (нигде кроме вершин) диагоналями. Может ли при этом получиться меньше двух треугольников с парой сторон, бывших сторонами исходного многоугольника?

---

[1] такое дерево называется *остовом* графа

[2] граф называется *полным*, если любая его вершина соединена с любой другой ровно одним ребром

Разные задачи о графах

М$7\frac{2}{3}\diamond$1 (формула Эйлера). Всегда ли $в-р+г=2$ в плоском связном графа с $в$ вершинами, $р$ рёбрами и $г$ гранями[1]? Справедливо ли это равенство для вершин, рёбер и граней произвольного выпуклого многогранника[2]?

М$7\frac{2}{3}\diamond$2. Можно ли нарисовать на сфере полный граф с пятью вершинами, чтобы его рёбра не пересекались?

М$7\frac{2}{3}\diamond3^*$. Как изменится формула Эйлера, если граф с непересекающимися рёбрами нарисован не на сфере, а на

а) кренделе (т. е. «сфере с 2 ручками», см. рис. $7\frac{2}{3}$ - 1)

б) торе («сфере с ручкой») **в*)** сфере с g ручками?

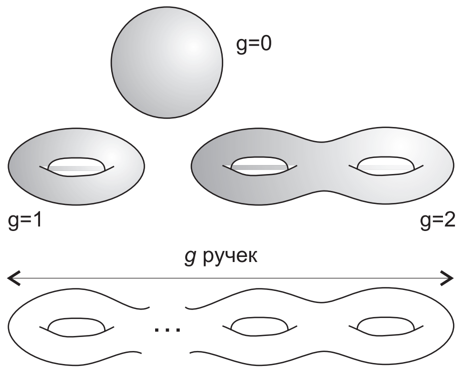


Рис. $7\frac{2}{3}$ - 1. Сферы с ручками.

М$7\frac{2}{3}\diamond$4. Можно ли построить три дома, вырыть три колодца и проложить попарно непересекающиеся тропинки от каждого дома к каждому колодцу?

М$7\frac{2}{3}\diamond$5. На плоскости отмечено несколько точек, никакие три из них не лежат на одной прямой. Двое по очереди соединяют отрезками любые две из ещё не соединённых точек так, чтобы эти отрезки не пересекались нигде кроме отмеченных точек. Тот, кто не может сделать ход, — проиграл. Зависит ли исход этой игры от того, как ходят соперники?

М$7\frac{2}{3}\diamond6^*$. Трёхзначный кодовый замок откроется как только будут последовательно набраны три правильные цифры подряд (вне зависимости от того, какие цифры набирались до этого). Можно ли, набирая по одной цифре в секунду, открыть такой замок за 17 минут?

М$7\frac{2}{3}\diamond$7. В некой компании поровну юношей и девушек и каждый юноша знаком с двумя девушками, а каждая девушка — с двумя юношами. Докажите, что всех их можно переженить друг на друге в рамках этих знакомств.

***k*-дольные графы.** Раскраска вершин графа называется *правильной*, если никакие две вершины одинакового цвета не соединены ребром. Граф называется *k-дольным*, если правильная раскраска его вершин возможна k цветами и не меньше.

М$7\frac{2}{3}\diamond$8. Равносильна ли двудольность отсутствию циклов нечётной длины?

М$7\frac{2}{3}\diamond$9. В любом ли k-дольном графе есть путь из ровно k разноцветных вершин?

М$7\frac{2}{3}\diamond$10. Существует ли граф с n вершинами $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ и n рёбрами $\{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$, такими что A_i соединяется ребром с A_j тогда и только тогда, когда b_i и b_j выходят из одной вершины? Если да, то какова степень каждой вершины?

М$7\frac{2}{3}\diamond$11. Города страны соединены $k \cdot m$ прямыми авиалиниями, и некие m юридических лиц вознамерились прихватизировать ровно по k линий, однако антимонопольная служба зорко следит за тем, чтобы ни в одном из городов ни одному лицу не досталось бы сразу две линии, выходящие из этого города. Возможно ли осуществить такую прихватизацию?

М$7\frac{2}{3}\diamond$12. В кубической коробке $n \times n \times n$ лежали n^3 единичных кубиков. Кубики высыпали, каждый просверлили по диагонали, затем все плотно нанизали на нить и связали в кольцо (соединили вершину первого кубика с вершиной последнего). При каких n получившееся «ожерелье» можно обратно убрать в коробку?

М$7\frac{2}{3}\diamond13^*$. В гости ожидается либо n, либо m человек, причём $\text{НОД}(n,m)=1$. На какое минимальное число секторов нужно разрезать круглый торт, чтобы из них можно было сложить как n, так и m одинаковых кусков?

М$7\frac{2}{3}\diamond14^*$. Всегда ли среди 50 человек найдутся двое с чётным (возможно, нулевым) числом общих знакомых среди 48 остальных?

[1] ср. с зад. М$4\frac{1}{2}\diamond$3 и зад. М$4\frac{1}{2}\diamond$4

[2] который есть не что иное, как связный граф с непересекающимися рёбрами, нарисованный на сфере

Множества и отображения

(памятка начинающему пользователю)

Понятие *множества* в анализе, подобно понятию *прямой* в геометрии, определяется не конструктивно, а «как объект, удовлетворяющий аксиомам» (этот список *аксиом теории множеств* мы пока не будем уточнять). Как *прямая* и *точка* формализуют известные пространственные образы, так *множества* формализуют житейские представления о совокупностях предметов произвольной природы. Множество состоит из *элементов*. Элементы могут быть любые: числа, стулья, другие множества... Принадлежность элемента a множеству A обозначается $a \in A$. Единственное множество, не содержащее ни одного элемента, называется *пустым* и обозначается $\varnothing$. Все элементы в любом множестве, по определению, *различны*. Множество задано, как только про любой объект можно сказать, принадлежит он данному множеству или нет. Два множества равны, если они состоят из одних и тех же элементов. Множество A называется *подмножеством* множества B (обозначение: $A \subset B$), если каждый элемент $a \in A$ лежит также и в B. Для любых двух множеств A и B множество $A \cup B$, состоящее из всех элементов, принадлежащих хотя бы одному из них, называется их *объединением*; множество $A \cap B$, состоящее из всех элементов, принадлежащих одновременно каждому из них, называется их *пересечением*; множество $A \setminus B$, состоящее из всех элементов множества A, которые не содержатся в B, называется их *разностью*.

М8◇1. Сколько всего подмножеств у множества, содержащего n элементов?

М8◇2. Какие из перечисленных ниже свойств справедливы для любых множеств A, B и C:

а) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ **б)** $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$

в) $A \cup C = B \cup C \ \Rightarrow \ A = B$ **г)** $(A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

д) $A \setminus C = B \setminus C \ \Rightarrow \ A = B$ **е)** $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$

ж) $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$ **з)** $A \cap C = B \cap C \ \Rightarrow \ A = B$

М8◇3. Выражаются ли:

а) пересечение через разность? **б)** разность через пересечение и объединение?

Отображение $A \xrightarrow{f} B$ из множества A в множество B — это правило, сопоставляющее *каждому* элементу $a \in A$ *ровно один* элемент $f(a) \in B$, зависящий от a и называемый *образом* a. Подмножество $f(A) \subset B$, состоящее из образов элементов множества A, называется *образом* отображения f. Отображения $A \xrightarrow{f} B$ и $A \xrightarrow{g} B$ *равны*, если $f(a) = g(a) \quad \forall a \in A$. Отображение $B \xrightarrow{g} A$ называется *обратным* к отображению $A \xrightarrow{f} B$, если $g(f(a)) = a \quad \forall a \in A$ и одновременно $f(g(y)) = y \quad \forall b \in B$; в этой ситуации отображение f (и отображение g) называют *обратимым* и пишут $g = f^{-1}$. Отображение $A \xrightarrow{f} B$ называется *отображением «на»* (или *сюръективным*, или *эпиморфным*, или *наложением*), если у каждого элемента $b \in B$ есть прообраз в A, т. е. $f(A) = B$. Отображение называется *отображением «в»* (или *инъективным*, или *мономорфным*, или *вложением*), если никакие два элемента из A не переходят в один и тот же элемент B, т. е. $a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$. Отображение, являющееся одновременно и вложением и наложением, называется *взаимно однозначным* (или *изоморфизмом*, или *биекцией*).

М8◇4. Нарисуйте все отображения: **а)** из $\{0,1,2\}$ в $\{0,1\}$; **б)** из $\{0,1\}$ в $\{0,1,2\}$.

М8◇5. Из отображений: $\mathbb{Z} \xrightarrow{x \mapsto x^2} \mathbb{Z}$; $\mathbb{N} \xrightarrow{x \mapsto x^2} \mathbb{N}$; $\mathbb{Z} \xrightarrow{x \mapsto px,} \mathbb{Z}$ (с $p \in \mathbb{Z}$); $\mathbb{R} \xrightarrow{x \mapsto px,} \mathbb{R}$ (с $p \in \mathbb{R}$) выберите все **а)** биекции, **б)** инъекции, **в)** сюръекции.

М8◇6. Равносильна ли взаимная однозначность обратимости?

М8◇7. Достаточно ли для того, чтобы f было обратно к g, только одного условия

а) $f(g(b)) = b \quad \forall b \in B$? **б)** $g(f(a)) = a \quad \forall a \in A$?

М8◇8. Некое число делится на 2, но не делится на 4. Каких делителей у него больше: чётных или нечётных?

М8◇9. Каких треугольников с целыми длинами сторон больше: с периметром 1999 или 2002?

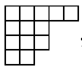
Как сравнивать множества

По пыльной тропинке далёкой планеты бредёт стадо семиногих пятихвосток.
Сколько ног приходится на каждую сотню хвостов ?
(детская загадка)

М9◇1. Сколько всего разных **а)** любых **б)** инъективных **в)** сюрьективных **г)** биективных отображений можно построить из n-элементного множества в m-элементное?

Прообразы. Если задано отображение $A \xrightarrow{f} B$, то $\forall\, b \in B$ множество $f^{-1}(b) \overset{\text{def}}{=} \{\, a \in A \mid f(a) = b \,\} \subset A$ называется *полным прообразом* b, а его элементы — *прообразами* b. У разных $b \in B$ может быть разное число (в том числе и нуль) прообразов. Если каждый $b \in B$ имеет ровно m прообразов, то отображение f называется *m-листным накрытием*[1].

М9◇2. Как изменятся ответы в зад. М7◇3, если букву `о` и букву `к` обе заменить буквой **ы**? Сколько слов можно получить переставляя буквы в словах: **а)** `кок`, **б)** `курок`, **в)** `СССР`, **г)** `колобок`, **д)** `рефрижератор`, **е)** $\underbrace{\mathtt{aa\ldots a}}_{\alpha}\underbrace{\mathtt{бб\ldots б}}_{\beta}$, **ж)** $\underbrace{\mathtt{a_1a_1\ldots a_1}}_{m_1}\underbrace{\mathtt{a_2a_2\ldots a_2}}_{m_2}\ldots\underbrace{\mathtt{a_ka_k\ldots a_k}}_{m_k}$?

Диаграмма Юнга — это картинка типа , состоящая из выровненных по левому краю горизонтальных клеточных полосок, длина которых сверху вниз не возрастает.

М9◇3. Имеется 5 разноцветных чашек, 7 разноцветных соломинок, 4 одинаковых стакана и 6 одинаковых кусков сахара. Сколькими способами можно разложить[2]: **а)** сахар по чашкам? **б)** соломинки по чашкам? **в*)** сахар по стаканам? **г*)** соломинки по стаканам?

М9◇4. Как изменятся ответы в зад. М9◇3, если запретить пустые ёмкости?

М9◇5. Сколько имеется одночленов степени d от **а)** двух **б)** трёх **в)** n переменных?

М9◇6. Цело ли число $1000!/10!^{100}$?

М9◇7. Сколько получится слагаемых, если тупо раскрыть скобки у $(a+b+c)^3$? Какие одночлены и с какими коэффициентами останутся после приведения подобных?

М9◇8. Между какими из перечисленных ниже множеств имеется изоморфизм? Постройте эти изоморфизмы явно. Сколько элементов в каждом множестве?

а) значки, которые можно высвечивать, зажигая ровно 12 лампочек на прямоугольном табло, имеющем 5 рядов по 4 лампочки в каждом;

б) способы раскладывания 8 одинаковых кусков сахара по 13 разным чашкам;

в) слова, которые получаются при перестановке букв в слове `ааааааааббббббббббббб`;

г) маршруты из зад. М7◇12, приводящие шарик в 12-ю комнату на 20-м этаже (этажи и комнаты нумеруются сверху вниз и слева направо, начиная с нулевого номера);

д) одночлены a^8b^{12}, которые получатся если тупо раскрыть скобки у $(a+b)^{20}$ и не приводить подобные слагаемые;

е) диаграммы Юнга высоты $\leqslant 8$ и ширины $\leqslant 12$.

М9◇9*. Грани кубика раскрашивают в 6 фиксированных разных цветов (разные – в разные). Сколько разных кубиков может получиться?

М9◇10*. Как изменится ответ, если шестью цветами раскрашивать не кубик, а тетраэдр?

М9◇11*. Сколько разных игрушек получится, если в предыдущих двух задачах склеивать крашеные кубики (соотв. тетраэдры) по два грань к грани?

[1] в частности, однолистные накрытия — это в точности взаимно однозначные отображения

[2] две раскладки одинаковы, если они получаются друг из друга передвиганием ёмкостей по столу без изменения их содержимого.

Мультиномиальные коэффициенты

М10◇1. Сколько слагаемых получится, если раскрыть скобки и привести подобные у $(a+b+c)^5$? Будут ли среди них a^2bc^2 и ab^2c^3, и если да, то с каким коэффициентом?

М10◇2. Какие одночлены и с какими коэффициентами получатся после раскрытия скобок и приведения подобных у **а)** $(1+x)^n$; **б)** $(a+b)^n$; **в)** $(x_1+x_2+\dots+x_m)^2$; **г)** $(x_1+x_2+\dots+x_m)^n$; **д)** $(1+x_1+x_2+\dots+x_m)^n$.

Биномиальные коэффициенты и числа сочетаний. Коэффициент при x^k, получающийся после раскрытия скобок и приведения подобных слагаемых у $(1+x)^n$, называется *биномиальным коэффициентом* и обозначается $\binom{n}{k}$ (обратите внимание, что $\binom{n}{k}=0$ при $k<0$ и $k>n$ и $\binom{n}{n}=\binom{n}{0}=\binom{0}{0}=1$). Количество слов, которые можно получить, переставляя буквы в n-буквенном слове `аа...абб...б`, содержащем k букв `а` и $(n-k)$ букв `б`, называется *числом сочетаний* из n по k и обозначается C_n^k.

М10◇3°. Докажите, что $\binom{n}{k}=C_n^k$ и совпадает с числом путей из зад. М7◇12, ведущих в k-тую комнату на n-том этаже. Верно ли, что $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$?

М10◇4°. Выразите $\binom{n}{k}$ явно через n и k и вычислите для $0\leqslant n\leqslant 15$ и всех $0\leqslant k\leqslant n$.

М10◇5. Из произвольной последовательности чисел $A_0,A_1,\dots,A_n$ строят новую последовательность $A_0^{(1)},A_1^{(1)},\dots,A_{n-1}^{(1)}$, состоящую из сумм соседних элементов: $A_i^{(1)}=A_i+A_{i+1}$. Затем строят следующую последовательность $A_0^{(2)},A_1^{(2)},\dots,A_{n-2}^{(2)}$ с $A_i^{(2)}=A_i^{(1)}+A_{i+1}^{(1)}$ и т. д. пока не получится последовательность $A_0^{(n)}$, состоящая из одного числа. Выразите его через исходные числа $A_0,A_1,\dots,A_n$ явной формулой.

Треугольник Паскаля — это бесконечный вниз числовой треугольник на рисунке справа. Его строки нумеруются сверху вниз, начиная с нуля, а числа в каждой строке — слева направо, также начиная с нуля; k-е число n-того этажа — это $C_n^k=\binom{n}{k}$.

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
\iddots & & \iddots & & \iddots & & \ddots & & \ddots & & \ddots
\end{array}$$

М10◇6. Найдите в треугольнике Паскаля последовательности: натуральных чисел 1, 2, 3, …, треугольных чисел: T_1, T_2, T_3, …, а также «пирамидальных» чисел: Π_1, Π_2, Π_3, …, которые составляются из треугольных по правилу: $\Pi_k\overset{\text{def}}{=}T_1+T_2+\dots+T_k$. Вычислите сумму[1]: $C_k^0+C_{k+1}^1+\dots+C_{k+n}^n$.

М10◇8. Вычислите суммы: **а)** $C_n^0+C_n^1+C_n^2+\dots+C_n^n$; **б)** $C_n^0-C_n^1+C_n^2-\dots+(-1)^nC_n^n$.

М10◇9. Вычислите суммы: **а)** $C_n^0+C_{n-1}^1+C_{n-2}^2+\dots$ **б)** $C_n^0+C_{n+1}^2+C_{n+2}^4+\dots$ **в)** $C_n^1+2\,C_n^2+\dots+n\,C_n^n$ **г)** $C_n^0+2\,C_n^1+\dots+(n+1)\,C_n^n$ **д*)** $\binom{n}{0}^2+\binom{n}{1}^2+\dots+\binom{n}{n}^2$

М10◇10. Выразите $(n+1)^{k+1}-n^{k+1}$ в виде многочлена от n. Покажите, что сумма k-тых степеней первых n натуральных чисел является многочленом $(k+1)$-ой степени от n. Найдите его старший коэффициент и свободный член.

М10◇11*. Для $k=5$ выпишите многочлены из зад. М10◇10 явно.

---

[1] С этой задачей связана такая многомерная геометрия:

М10◇7*. Двумерная пирамида высоты k — это треугольник: $\Pi_k^{(2)}\overset{\text{def}}{=}T_k$. Трёхмерная пирамида высоты k состоит из сложенных в стопку треугольников $\Pi_k^{(3)}\overset{\text{def}}{=}T_1+T_2+\dots+T_k$. Четырёхмерная пирамида высоты k состоит из сложенных в стопку вдоль «четвёртой координатной оси» трёхмерных пирамид: $\Pi_k^{(4)}\overset{\text{def}}{=}\Pi_1^{(3)}+\Pi_2^{(3)}+\dots+\Pi_k^{(3)}$. Что такое m-мерная пирамида высоты k и сколько m-мерных кубиков уйдёт на её постройку? Из двух двумерных пирамид складывается прямоугольник: $T_k+T_k=k\times(k+1)$. Можно ли из шести трёхмерных пирамид $\Pi_k^{(3)}$ сложить параллелепипед $k\times(k+1)\times(k+2)$? Из скольких m-мерных пирамид высоты k следует пытаться собирать m-мерный параллелепипед и каковы будут его размеры?

Две вариации на тему биномиальных коэффициентов

«... при помощи этой формулы я смог сложить десятые степени первой тысячи натуральных чисел менее, чем за половину четверти часа...»
(Якоб Бернулли (1654–1705), «Ars Conjectandi», издано в 1713 г., посмертно)

М$10\frac{1}{2}$◇1. Любое ли целое число граммов можно отвесить на чашечных весах, пользуясь набором гирь в 1 *г*, 3 *г*, 9 *г*, 27 *г*, ... (по одной гире каждого веса)?

***m*-ичная позиционная система счисления** использует m цифр, коими служат символы: $\overline{0}, \overline{1}, \ldots, \overline{m-1}$. Под n-разрядным числом m-ичной системы мы понимаем любую последовательность из n m-ичных цифр (возможно, начинающуюся с нулей). Для $\ell \in \mathbb{N}$ запись $\ell = \overline{\mu_0\mu_1\ldots\mu_{n-1}}$ означает, по определению, что $\ell = \mu_0 + \mu_1 m + \mu_2 m^2 + \cdots + \mu_{n-1} m^{n-1}$. Количество всех n-разрядных чисел m-ичной системы с суммой цифр k мы будем обозначать через $\beta_m(n,k)$.

М$10\frac{1}{2}$◇2. Запишите десятичные числа 43, 57 и 1999 в 2-ичной, 3-ичной и 16-ричной системах.

М$10\frac{1}{2}$◇3. Покажите, что при заданном натуральном $m \geqslant 2$, каждое натуральное число ℓ может быть единственным образом записано в m-ичной позиционной системе счисления, т. е. что существует единственный набор целых чисел $\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_{n-1}$, лежащих в пределах от 0 до $m-1$ включительно и с $\mu_{n-1} \neq 0$, такой что $\ell = \mu_0 + \mu_1 m + \mu_2 m^2 + \cdots + \mu_{n-1} m^{n-1}$.

М$10\frac{1}{2}$◇4. Сколько всего n-разрядных чисел в m-ичной системе и чему равно $\beta_2(n,k)$?

М$10\frac{1}{2}$◇5*. Докажите, что $\beta_m(n,k)$ равно коэффициенту при x^k в разложении

$$\left(1 + x + x^2 + \cdots + x^{m-1}\right)^n$$

и удовлетворяет соотношениям $\beta_m(n,k) = \beta_m(n,\, n(m-1)-k)$ и

$$\beta_m(n,k) = \beta_m(n-1,k) + \beta_m(n-1,k-1) + \cdots + \beta_m(n-1,k-m+1)\,.$$

М$10\frac{1}{2}$◇6*. Суеверные люди считают счастливым каждое шестиразрядное десятичное число, у которого сумма трёх первых цифр равна сумме трёх последних. Сколько таких «счастливых» чисел? ([1])

Числа Бернулли B_k начинаются с $B_0 \overset{\text{def}}{=} 1$ и определяются реккурентно[2] формулой

$$B_k = -\frac{1}{k+1}\left(C^0_{k+1}B_0 + C^1_{k+1}B_1 + \cdots + C^{k-1}_{k+1}B_{k-1}\right).$$

М$10\frac{1}{2}$◇7*. Покажите, что сумма k-тых степеней первых $(n-1)$ натуральных чисел равна

$$\frac{1}{k+1}\left(C^0_{k+1}B_0\, n^{k+1} + C^1_{k+1}B_1\, n^k + \cdots + C^{k-1}_{k+1}B_{k-1}\, n\right).$$

М$10\frac{1}{2}$◇8*. Вычислите первые 14 чисел Бернулли и сумму $1^{10} + 2^{10} + 3^{10} + \cdots + (n-1)^{10}$.

М$10\frac{1}{2}$◇9*. Что Вы можете сказать про числа Бернулли с нечётными номерами?

М$10\frac{1}{2}$◇10*. Как ведут себя знаки чисел Бернулли?

---

[1] Подсказка: их $\beta_{10}(6,27)$.

[2] Предупреждение: «явного» выражения B_n через n не существует!

Арифметика вычетов

M11◇1 (остаток суммы и произведения). Выразите остатки от деления на n чисел $A+B$ и AB через остатки a и b самих чисел A, B.

M11◇2. Найдите последнюю цифру и остаток от деления на 7 у 1998^{1999} и $1998^{1999^{2000}}$.

M11◇3. Верно ли, что $2222^{5555} + 5555^{2222}$ делится на 7, а $2^{70} + 3^{70}$ — на 13?

M11◇4. Может ли квадрат натурального числа давать остаток 2 от деления на 6? Какие остатки могут давать квадраты натуральных чисел от деления на 8?

M11◇5. Имеет ли уравнение $x^2 + y^2 + z^2 = 2\,xyz$ ненулевые решения в целых числах?

M11◇6. Верно ли, что: **а)** $a^2 + b^2 \,\vdots\, 7 \Rightarrow a \,\vdots\, 7$ и $b \,\vdots\, 7$? **б*)** $a^3 + b^3 + c^3 \,\vdots\, 7 \Rightarrow abc \,\vdots\, 7$? **в*)** $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 \,\vdots\, 9 \Rightarrow abcde \,\vdots\, 9$?

Арифметика вычетов по модулю 7 (или **7-*арифметика***) $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ состоит из семи «чисел» — остатков от деления на 7 (мы будем обозначать их $[0]_7, [1]_7, \ldots, [6]_7$). По определению, $[x]_7 + [y]_7$ есть остаток от деления на 7 суммы $x+y$, а $[x]_7 \cdot [y]_7$ — остаток произведения xy.

M11◇7. Составьте для 7-арифметики таблицы сложения и умножения и проверьте, что эти операции подчиняются обычным переместительному, сочетательному и распределительному законам. Дайте определение противоположного числа $-a$ и обратного числа a^{-1} к данному числу $a \in \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$. Составьте таблицы противоположных и обратных чисел. Справедливы ли в 7-арифметике тождества $(-1)\cdot a = -a$ и $(-a)\cdot(-b) = ab$?

M11◇8. Дайте определение n-арифметики $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ и составьте таблицы сложения и умножения для 5-, 6- и 8-арифметик. Верно ли, что при умножении в n-арифметике
а) у всех ненулевых чисел есть обратные **б)** «минус» на «минус» даёт «плюс»
в) $a \neq 0$ и $b \neq 0 \Rightarrow ab \neq 0$ **г)** $ab = ac$ и $a \neq 0 \Rightarrow b = c$ **д)** $a \neq 0 \Rightarrow a^n \neq 0\ \forall\, n \geqslant 1$
е) степени $a^0, a^1, a^2, a^3, \ldots$ любого $a \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ всегда «зацикливаются»?

M11◇9. Вычислите сумму всех чисел n-арифметики. Делится ли $1^3 + 2^3 + \cdots + 28^3$ на 29?

M11◇10 (позиционные признаки делимости). Вычислите остатки всех степеней десятки от деления на 2, 5, 4, 3, 9, 11, 7 и скажите, как глядя на цифры десятичной записи данного числа (скажем, $\overline{abcdefghi}$) узнать, делится ли оно на 2, 5, 4, 3, 9, 11, 7?

M11◇11. У каких чисел 5-, 6- и 8-арифметик есть обратные (такие числа называются *обратимыми*)? Укажите эти обратные явно.

M11◇12. Докажите, что следующие свойства $a \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ попарно эквивалентны:
а) a обратим; **б)** отображение умножения на a: $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \xrightarrow{x \mapsto ax} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ взаимно однозначно;
в) $ax = 0 \Rightarrow x = 0$; **г)** $ax = ay \Rightarrow x = y$; **д)** $\forall y\ \exists x\ :\ ax = y$; **е)** $\text{нод}(a, n) = 1$.

M11◇13* (теорема Вильсона). Чему равно произведение всех ненулевых чисел n-арифметики при простом и составном n? Верно ли, что натуральное число $p \geqslant 2$ просто, если и только если оно делит $(p-1)! + 1$?

M11◇14* (гомоморфизм Фробениуса). Пусть p – простое. Докажите, что C_p^k делится на p при всех $1 < k < p$ и что в p-арифметике выполнено тождество $(a+b)^p = a^p + b^p$.

M11◇15* (малая теорема Ферма). Докажите, что для любого $a \in \mathbb{N}$ и простого p степень a^p имеет тот же остаток от деления на p, что и a.

Простые числа и разложение на множители

Число $p\in\mathbb{Z}$ называется *простым*, если оно делится только на ±1 и $\pm p$.

M$11\frac{1}{2}$◇1. Найдите все простые числа, которые одновременно представляются в виде суммы и в виде разности двух простых чисел.

M$11\frac{1}{2}$◇2. Докажите, что простых чисел бесконечно много.

M$11\frac{1}{2}$◇3. Существуют ли на числовой прямой сколь угодно длинные отрезки, не содержащие ни одного простого числа?

M$11\frac{1}{2}$◇4*. Верно ли, что среди чисел вида **а)** $2^{2^k}-1$ **б)** $1\overbrace{00\ldots00}^{k}3$ **в)** $\overbrace{33\ldots33}^{k}1$ имеется бесконечно много составных?

M$11\frac{1}{2}$◇5 (основное свойство простых чисел). Пусть $p\in\mathbb{Z}$ простое. Докажите, что $\forall\, a,b\in\mathbb{Z}$ произведение ab делится на p только если a или b делится на p. Бывают ли непростые числа p с таким свойством?

M$11\frac{1}{2}$◇6. Пусть $p>0$ простое. Существуют ли $x,y\in\mathbb{N}: x^2=p\,y^2$?

M$11\frac{1}{2}$◇7*. Существуют ли $n\geqslant1$ различных простых чисел $p_1,p_2,\ldots,p_n$ и рациональные числа $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$, для которых $\lambda_1\sqrt{p_1}+\lambda_2\sqrt{p_2}+\cdots+\lambda_n\sqrt{p_n}$ рационально? Это весьма трудная задача. Попытайтесь решить её хотя бы для $n=1,2,3$.

M$11\frac{1}{2}$◇8 (факториальность $\mathbb{Z}$). Докажите, что любое целое число z можно представить в виде произведения $z=\pm p_1p_2p_3\cdots p_s$, в котором все сомножители суть натуральные простые числа (не обязательно разные), и любые два таких разложения (например, полученные разными способами) могут различаться *только порядком следования множителей.*

M$11\frac{1}{2}$◇9. Разложите на простые множители все числа A, B из зад. M3◇6.

M$11\frac{1}{2}$◇10. Сколько различных натуральных делителей у числа: **а)** 27; **б)** 35; **в)** 67500; **г)** $p_1^{m_1}p_2^{m_2}p_3^{m_3}\cdots p_s^{m_s}$ (p_ν — попарно разные простые).

M$11\frac{1}{2}$◇11. Найдите все кратные 30 числа с ровно тридцатью натуральными делителями.

M$11\frac{1}{2}$◇12*. Перечислите все $n\in\mathbb{N}$, имеющие не менее $\sqrt{n}$ натуральных делителей.

Функция Эйлера. Обозначим через $\varphi(n)$ количество обратимых чисел в n-арифметике (т. е. количество всех не превосходящих n натуральных чисел, взаимно простых с n, см. зад. M11◇12). Отображение $n\mapsto\varphi(n)$ называется *функцией Эйлера.*

M$11\frac{1}{2}$◇13. Изобразим числа n-арифметики $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ точками, зафиксируем какое-либо одно число $a\in\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, и из каждой точки $x\in\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ проведём стрелку в точку ax. Докажите, что если a обратим, то на этой картинке движение по стрелкам распадается на непересекающиеся циклы, причём каждый цикл, содержащий хоть одно обратимое число, весь состоит из обратимых чисел, и все циклы, состоящие из обратимых чисел, имеют одинаковую длину.

M$11\frac{1}{2}$◇14 (теорема Эйлера). Используя предыдущую задачу, докажите, что для любых взаимно простых $a,b\in\mathbb{N}$ число $a^{\varphi(b)}$ имеет остаток 1 от деления на b.

M$11\frac{1}{2}$◇15. Вычислите $\varphi(n)$ для **а)** $n=36$ **б)** $n=p^k$ (p – простое) **в)** $n=p_1p_2p_3\cdots p_s$ **г*)** $n=p_1^{m_1}p_2^{m_2}p_3^{m_3}\cdots p_s^{m_s}$ (p_ν попарно разные простые).

Бесконечные множества

М12◇1°. Придумайте множество A, вложение $A \overset{\varphi}{\hookrightarrow} A$ и наложение $A \overset{\psi}{\twoheadrightarrow} A$, которые, однако, не являются *биекциями*. Возможно ли такое для конечного множества A?

М12◇2. Толя рисует на доске 10 крестиков, после чего Коля стирает один из них, затем Толя рисует ещё 10 крестиков, а Коля стирает ещё один крестик и т. д. На первую пару ходов уходит 1 сек., на вторую — пол секунды, на третью — четверть и т. д. Толя выигрывает, если через 2 сек. на доске будет хоть один крестик; в противном случае выигрывает Коля. Кто победит при правильной игре?

М12◇3. Бесконечный направо и вниз лист клетчатой бумаги сплошь заполнен крестиками и ноликами. Всегда ли, глядя на этот лист, можно построить последовательность крестиков-ноликов, не совпадающую ни с одной из строк?

Счётные множества. Множество M называется *счётным*, если оно изоморфно множеству натуральных чисел $\mathbb{N}$. Иначе говоря, множество M счётно, если все его элементы можно занумеровать разными натуральными числами, так что все натуральные числа будут при этом израсходованы.

М12◇4. Счётно ли множество: **а)** простых **б)** целых **в)** рациональных чисел?

М12◇5. Счётно ли множество точек координатной плоскости, обе координаты которых **а)** целые **б)** рациональные?

М12◇6. Всегда ли бесконечное подмножество счётного множества счётно?

М12◇7. Является ли счётным объединение **а)** счётного множества с конечным множеством; **б)** конечного числа (например, двух или трёх) счётных множеств; **в)** счётного множества счётных множеств?

М12◇8. Пусть при отображении множеств $A \xrightarrow{f} B$ у каждого $b \in B$ имеется непустое **а)** конечное **б)** конечное или счётное множество прообразов. Верно ли, что A счётно тогда и только тогда, когда B счётно?

М12◇9. Счётно ли множество **а)** конечных **б)** бесконечных слов из букв а и б ?

М12◇10. Счётно ли множество всех: **а)** конечных **б)** счётных подмножеств счётного множества?

Мощность. Про изоморфные множества говорят, что они *равномощны*. Если множество A изоморфно некоторому подмножеству множества B, но не изоморфно самому B, то говорят, что B *мощнее* A.

М12◇11*. Докажите, что множество отображений из произвольного множества A в любое множество, содержащее не менее двух элементов, мощнее, чем A.

М12◇12*. Докажите, что множество всех подмножеств непустого множества A мощнее, чем A.

М12◇13. Постройте биекцию между отрезком $[0, 1]$ и полуинтервалом $[0, 1)$.

М12◇14* (теорема Кантора - Бернштейна). Докажите, что если множество B равномощно подмножеству множества A, а множество A равномощно подмножеству множества B, то A и B равномощны.

О противоречиях. Высказывание *противоречиво*, если из него следует *ложное утверждение* (т. е. высказывание типа «A и не A»). Из ложного утверждения следует всё что угодно.

М12◇15* (уроки демократии - 2). Был, помнится, в Думе такой меж депутатами разговор:

ж: «*На следующей неделе думу точно распустят!*» з: «*В какой же день?*»

ж: «*Об этом не будет известно даже накануне!*».

Докажите, что высказывания г-на Ж противоречивы.

М12◇16*. Докажите противоречивость таких понятий: **а)** «множество всех множеств»; **б)** «множество всех множеств, задающихся фразой из $\leqslant 2000$ типографских знаков».

Действительные числа и БДД

Бесконечная десятичная дробь (БДД) — это конечная влево и бесконечная вправо последовательность десятичных цифр вида $\pm\overline{b_{-n}\dots b_{-1}b_0, b_1b_2\dots b_m\dots}$. Куски слева и справа от запятой называются *целой* и *дробной* частями данной БДД. Если БДД имеет лишь конечное множество ненулевых цифр, то она называется *конечной*; у такой БДД все цифры правее некоего разряда — нули, и их обычно не пишут.

Множество действительных чисел $\mathbb{R}$ получается из множества всех БДД путём отождествления друг с другом некоторых пар БДД по следующему правилу: две БДД, по определению, изображают одно и то же действительное число, если и только если они одного знака и существует номер $i \in \mathbb{Z}$, такой что цифры этих дробей во всех разрядах левее i-того совпадают, в i-том разряде различаются ровно на единицу, и дробь с большей i-той цифрой имеет справа от i-того разряда одни нули, а с меньшей — одни девятки. Иными словами, $\overline{b_\beta\,\dots\,b_{i-1}\,b_i\,9999\,\dots} = \overline{b_\beta\,\dots\,b_{i-1}\,(b_i+1)\,0000\dots}$ как действительные числа. Если действительное число имеет два представления в виде БДД, то представление, оканчивающееся нулями, мы будем называть *стандартным* и использовать по умолчанию именно его.

М13◇1. Докажите, что множество $\mathbb{R}$ несчётно.

Неравенства. Положительные БДД *больше* отрицательных. Для сравнения двух положительных БДД их стандартные представления записывают друг под другом, выровнив по запятой; *меньшей* считается БДД с меньшей самой левой из несовпадающих цифр. Для отрицательных БДД наоборот: $-a < -b \Leftrightarrow a > b$.

Ограниченность. Число $b \in \mathbb{R}$ называется *верхней гранью* для данного множества действительных чисел $M \subset \mathbb{R}$, если $b \geqslant x \quad \forall x \in M$. Множество $M \subset \mathbb{R}$ называется *ограниченным сверху*, если у него есть верхняя грань. Аналогично определяются *нижняя грань* и *ограниченность снизу*. Множества ограниченные одновременно и сверху и снизу называются просто *ограниченными*.

М13◇2°. Не употребляя отрицаний, дайте определения:

а) числа, не являющегося нижней гранью данного множества $M \subset \mathbb{R}$;

б) множества, неограниченного сверху **в)** неограниченного множества.

Максимальные элементы. Число $m \in M$, такое что $m \geqslant x \quad \forall x \in M$, называется *максимальным элементом* множества $M \subset \mathbb{R}$. Максимальный элемент в множестве нижних граней данного множества M называется *точной нижней гранью* (сокращённо: ТНГ) и обозначается $\inf M$ (от латинского «infimum»).

М13◇3°. Дайте определение *минимального* элемента и *точной верхней грани* (сокращённо: ТВГ) данного множества $M \subset \mathbb{R}$ (она обозначается $\sup M$ — от латинского «supremum»).

М13◇4. Каждое ли ограниченное сверху подмножество в $\mathbb{R}$ имеет максимальный элемент?

М13◇5. Вычислите ТВГ множеств: **а)** $\{0,3;\ 0,33;\ 0,333;\ 0,3333;\ 0,33333;\ \dots\}$;

б) сумм $1+q+q^2+\dots+q^m$ с фиксированным $0<q<1$ (скажем, $q = 1/2$) и любым $m\in\mathbb{N}$.

М13◇6. Верно ли, что любая БДД $b \in \mathbb{R}$ есть ТВГ множества:

а) всех БДД, меньших b; **б)** всех конечных БДД, меньших b;

в) всех конечных БДД, являющихся начальными кусками b.

М13◇7 (теорема о полноте). Докажите, что каждое ограниченное сверху подмножество в $\mathbb{R}$ имеет точную верхнюю грань, а каждое ограниченное снизу – точную нижнюю.

М13◇8 (сложение и умножение). Суммой БДД $a, b \in \mathbb{R}$ называется ТВГ чисел вида $\alpha+\beta$, где $\alpha < a$ и $\beta < b$ — всевозможные *конечные* БДД. Аналогично, произведение ab двух *положительных* БДД — это ТВГ чисел вида $\alpha\beta$ с *конечными положительными* $\alpha < a$ и $\beta < b$ (на неположительные БДД произведение распространяется по стандартному правилу «−» на «−» даёт «+»). Докажите, что эти определения корректны (т. е. нужные ТВГ существуют), дают для конечных a и b то же, что и раньше, и проверьте, что $a(b+c) = ab+ac \quad \forall a,b,c\in\mathbb{R}$.

М13◇9 (корни). Пусть $b \in \mathbb{R}$ есть ТВГ конечных БДД β с $\beta^2 < 5$. Докажите, что b существует и вычислите b^2.

Об упорядочении

Три уровня порядка. Множество называется *частично упорядоченным* (ЧУМом), если про некоторые пары его элементов a, b можно сказать $a \leqslant b$ или $b \leqslant a$, так что при этом выполнены три свойства:

(1) $a \leqslant a\ \forall a$, **(2)** $a \leqslant b$ и $b \leqslant a \Rightarrow a = b$, **(3)** $a \leqslant b$ и $b \leqslant c \Rightarrow a \leqslant c$.

Подмножество $[\dots x] \overset{\text{def}}{=} \{m \in M \mid m \leqslant x\}$ ЧУМа M называется *начальным отрезком* M *до* x. ЧУМ называется *упорядоченным* (или *линейно упорядоченным*), если отношение порядка определено *для любой* пары элементов. В линейно упорядоченном множестве можно ввести отношение $a < b$ означающее, что $a \neq b$ и $a \leqslant b$; тогда $\forall a, b$ будет выполнена альтернатива: либо $a < b$, либо $a = b$, либо $a > b$. Элемент $\mu \in M$ ЧУМа M называется *минимальным*, если $\forall x \in M$ из неравенства $x \leqslant \mu$ вытекает равенство $x = \mu$. Линейно упорядоченное множество называется *вполне* или *индуктивно* упорядоченным, если в любом его подмножестве имеется *минимальный* элемент. Два вполне упорядоченных множества называются *подобными*, если между ними имеется взаимно однозначное соответствие, *сохраняющее порядок*. Классы подобных вполне упорядоченных множеств называются *трансфинитными числами*.

M$13\frac{1}{2}\diamond1^\circ$. Выясните, какие из указанных ниже отношений «$\preccurlyeq$» на множествах M являются упорядочениями и какого типа: **а)** $M = \mathbb{N}$ и $a \preccurlyeq b \iff b$ делится на a; **б)** то же для $M = \mathbb{Z}$;
в) $M = \mathbb{N},\ \mathbb{Z},\ \mathbb{Q}$ с обычным $\leqslant$ для чисел; **г)** то же для $M = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, где $\infty \geqslant n\ \forall n \in \mathbb{N}$;
д) M есть множество всех подмножеств некоторого множества A и $a \preccurlyeq b \iff a \subseteq b$;
е) M есть множество вершин ориентированного графа $\mathit{\Gamma}$ и $a \preccurlyeq b \iff$ в $\mathit{\Gamma}$ есть ребро $\overrightarrow{ab}$.

M$13\frac{1}{2}\diamond2^\circ$. Дайте определение максимального элемента ЧУМа и приведите пример ЧУМа с несколькими максимальными элементами.

M$13\frac{1}{2}\diamond3^\circ$. Верно ли, что любой начальный отрезок произвольного ЧУМа линейно упорядочен?

M$13\frac{1}{2}\diamond4$ (принцип трансфинитной индукции). Пусть множество M вполне упорядочено, и про его элементы высказано некое утверждение $\mathfrak{U}$, которое истинно для минимального элемента множества M, и при всех $m \in M$ из того, что $\mathfrak{U}$ истинно $\forall x < m$, следует, что $\mathfrak{U}$ истинно для m. Докажите, что $\mathfrak{U}$ истинно $\forall m \in M$.

M$13\frac{1}{2}\diamond5$. Может ли вполне упорядоченное множество быть подобно своему начальному отрезку, отличному от всего множества?

M$13\frac{1}{2}\diamond6$. Докажите, что отношение $a \preccurlyeq b \iff$ «a подобно начальному отрезку b» вполне упорядочивает трансфинитные числа.

Полные ЧУМы. ЧУМ M называется *полным*, если для каждого линейно упорядоченного подмножества $U \subset M$ существует элемент $m \in M$, такой что $u \leqslant m\ \forall u \in U$.

M$13\frac{1}{2}\diamond7^*$ (теорема о неподвижной точке). Докажите, что любое отображение $M \xrightarrow{f} M$ из полного ЧУМа в себя, обладающее свойством $x \leqslant f(x)\ \forall x \in M$, имеет неподвижную точку (т. е. $f(x_0) = x_0$ для некоторого $x_0 \in M$).

Аксиома выбора входит в список аксиом «строгой» теории множеств и утверждает, что в любом множестве непустых множеств можно выбрать по одному элементу из каждого множества (иначе говоря, для любого множества $\mathfrak{M}$, элементы которого сами суть непустые множества, существует отображение f из $\mathfrak{M}$ в объединение всех множеств $M \in \mathfrak{M}$, такое что $f(M) \in M\ \ \forall M \in \mathfrak{M}$).

M$13\frac{1}{2}\diamond8^*$. Выведите из аксиомы выбора и зад. M$13\frac{1}{2}\diamond7$ следующие два утверждения[1]:
а) (лемма Цорна) В любом полном ЧУМе есть максимальный элемент.
б) (теорема Цермело) Любое множество можно вполне упорядочить.

[1] решение этих (весьма трудных) задач не стыдно подглядеть в книгах: *Ван Дер Варден. Алгебра.* М. «Мир» (1976), стр. 246–249 или *П. С. Александров. Введение в теорию множеств и общую топологию.*. М. «Наука» (1977), стр. 80–83.

Континуум

Координатные пространства. Координатная прямая $\mathbb{R}^1$ — это множество всех действительных чисел. Аналогично, координатные плоскость $\mathbb{R}^2$, 3-мерное пространство $\mathbb{R}^3$, … , n-мерное пространство $\mathbb{R}^n$, … суть множества упорядоченных пар (x_1, x_2), троек (x_1, x_2, x_3), … , n-ок $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, … чисел $x_i \in \mathbb{R}$. Множество $\{\,(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid 0 \leqslant x_i \leqslant 1 \ \forall i \in \ \}$ называется *единичным n-мерным кубом* в $\mathbb{R}^n$.

М14◇1. Сколько у n-мерного куба **а)** вершин; **б)** рёбер; **в)** $(n-1)$-мерных граней, **г*)** k-мерных граней $(\,0 \leqslant k \leqslant (n-1)\,)$.

М14◇2. Нарисуйте 3-мерную развёртку и общую 2-мерную проекцию 4-мерного куба.

Несчётность и континуальность. Множество называется *несчётным*, если оно бесконечно и не счётно. Про множество, равномощное единичному отрезку говорят, что оно имеет *мощность континуума*.

М14◇3. Всегда ли $N \setminus M$ равномощно M, если M счётно, а N несчётно?

М14◇4. Можно ли нарисовать несчётное множество попарно непересекающихся
а) интервалов на прямой? **б*)** восьмёрок[1] на плоскости? **в*)** букв T на плоскости?

М14◇5. Имеют ли мощность континуума: **а)** множество бесконечных слов из букв a и б; **б°)** любой отрезок $[a, b]$ (с $a < b$); **в)** любой непустой интервал (a, b); **г)** вся прямая; **д)** m-мерный куб; **е)** множество бесконечных последовательностей вещественных чисел?

Целые и рациональные числа. БДД с нулевой дробной частью называются *целыми*. На координатной прямой множество целых БДД $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ получается откладыванием от 0 всевозможных целых кратных единичного отрезка. БДД $r \in \mathbb{R}$ называется *рациональной*, если $\exists\, k, m \in \mathbb{Z} : kr = m$ в $\mathbb{R}$. Подмножество рациональных БДД $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ на числовой прямой изображается откладыванием от 0 всевозможных отрезков, соизмеримых[2] с единичным.

М14◇6. Докажите, что конечные БДД рациональны. Верно ли, что $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}$ и $\forall\, \varepsilon > 0$ существуют $r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$, такие что $\alpha - \varepsilon < r_1 < \alpha < r_2 < \alpha + \varepsilon$?

М14◇7. Докажите, что множества: **а)** иррациональных **б*)** трансцендентных[3] действительных чисел имеют мощность континуума.

Дедекиндовы сечения. Разбиение $\mathbb{Q} = A_1 \sqcup A_2$ в объединение двух непересекающихся подмножеств, таких что $a_1 < a_2$ для любых $a_1 \in A_1$, $a_2 \in A_2$, называется *сечением* множества $\mathbb{Q}$.

М14◇8. Докажите, что для любого сечения $\mathbb{Q} = A_1 \sqcup A_2$ имеет место равенство $\sup A_1 = \inf A_2$ и выполняется ровно одна из трёх возможностей: либо в A_1 есть максимальный элемент, либо в A_2 есть минимальный элемент, либо действительное число $\sup A_1 = \inf A_2$ иррационально.

М14◇9. Забудем на время про БДД, будем понимать $\mathbb{Q}$ как множество обыкновенных дробей p/q с $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$ и назовём действительным числом Дедекинда любое сечение $\mathbb{Q} = A_1 \sqcup A_2$, в котором A_1 не имеет максимального элемента. Дайте определение суммы и произведения действительных чисел Дедекинда (это должно быть сечение нужного типа) и установите сохраняющий арифметические операции изоморфизм между множеством дедекиндовых действительных чисел и множеством действительных чисел, определённом в предыдущем листке посредством БДД[4].

М14◇10. Исходя только из дедекиндова определения действительных чисел (т. е. не пользуясь БДД, но в терминах сечений) докажите теорему о полноте (ср. с зад. М13◇7) и определите квадратные корни (ср. с зад. М13◇9).

---

[1] *восьмёркой* называется любая пара соприкасающихся внешним образом окружностей

[2] два отрезка называются *соизмеримыми*, если они допускают общую единицу измерения — третий отрезок, который целое число раз укладывается в каждом из них

[3] число называется *алгебраическим*, если оно является корнем многочлена с рациональными коэффициентами; числа, не являющиеся алгебраическими, называются *трансцендентными*

[4] ПОДСКАЗКА: сопоставьте каждому классу эквивалентных БДД $\alpha \in \mathbb{R}$ сечение $\mathbb{Q} = \{\, q \in \mathbb{Q} \mid q < \alpha \,\} \sqcup \{\, q \in \mathbb{Q} \mid q \geqslant \alpha \,\}$

Окрестности и покрытия

M15◇1 (лемма о вложенных отрезках). Имеется последовательность отрезков, каждый из которых содержится в предыдущем. Может ли пересечение всех этих отрезков быть пустым?

M15◇2. Изменится ли ответ, если отрезки заменить интервалами?

M15◇3. Группа естествоиспытателей в течении 6 часов наблюдала за (неравномерно) ползущей улиткой так, что она всё это время была под присмотром. Каждый наблюдатель следил за улиткой ровно 1 час без перерывов и зафиксировал, что она проползла за этот час ровно 1 метр. Могла ли улитка за время всего эксперимента проползти **а)** 5 *м* ? **б)** 10 *м* ? **в)** 12 *м* ?

M15◇4 (лемма о конечном покрытии). Докажите, что в любом покрытии отрезка интервалами найдётся конечный набор интервалов, покрывающий весь отрезок.

M15◇5. Из любого ли покрытия отрезка интервалами можно удалить часть так, чтобы оставшиеся интервалы тоже составляли покрытие, но каждую точку накрывало бы не более двух из них?

M15◇6. Изменится ли что-нибудь в предыдущих двух задачах, если отрезок заменить интервалом?

M15◇7. Всегда ли из покрытия отрезка **а)** конечным **б)** любым множеством содержащихся внутри него отрезков можно выкинуть часть отрезков так, чтобы оставшиеся по-прежнему покрывали исходный отрезок и их суммарная длина не превышала бы его удвоенной длины?

Внутренние точки и открытые множества. Для любого положительного числа ε будем называть ε-окрестностью точки $x_0 \in \mathbb{R}$ интервал

$$D_\varepsilon(x_0) \overset{\text{def}}{=} (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) = \{\, x \in \mathbb{R} \,:\, |x - x_0| < \varepsilon \,\} = \{\, x \in \mathbb{R} \,:\, x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon \,\}$$

длины 2ε с центром в x_0. Точка $a \in \mathbb{R}$ называется *внутренней точкой* множества $M \subset \mathbb{R}$, если у неё есть ε-окрестность, целиком содержащаяся в M. Множество называется *открытым*, если все его точки — внутренние. Иначе говоря, $U \subset \mathbb{R}$ открыто, если $\forall u \in U \ \exists \varepsilon > 0 : D_\varepsilon(u) \subset U$ (величина ε может зависеть от точки u). Пустое множество тоже, по определению, считается открытым.

M15◇8°. Убедитесь, что промежутки $(-\infty, a)$, $(a, -\infty)$ и (a, b) открыты. Можно ли разбить интервал в объединение двух непересекающихся открытых множеств?

M15◇9. Докажите, что объединение любого набора открытых множеств открыто.

M15◇10. Докажите, что пересечение конечного набора открытых множеств открыто. Так ли это для пересечений бесконечных наборов?

M15◇11. Докажите, что всякое открытое множество на прямой представляет собой объединение конечного или счётного набора попарно непересекающихся интервалов, в числе которых допускаются и неограниченные интервалы типа $(-\infty, a)$, $(a, +\infty)$ и $(-\infty, +\infty)$.

Изолированные точки и дискретные множества. Точка $a \in M \subset \mathbb{R}$ называется *изолированной точкой* множества M, если некоторая её ε-окрестность не содержит никаких других точек из M. Множество, все точки которого изолированы, называется *дискретным*.

M15◇12. Может ли бесконечное дискретное множество быть:
а) ограниченным? **б)** несчётным?

Предельные точки множеств

Предельные точки. Точка $x_0 \in \mathbb{R}$ называется *предельной точкой* множества $M \subset \mathbb{R}$, если *любая* её ε-окрестность $D_\varepsilon(x_0)$ содержит какую-нибудь точку $x \in M$, отличную от x_0.

M$15\frac{1}{2}$◇1. Постройте бесконечное множество $M \subset \mathbb{R}$, множество предельных точек которого: **а)** пусто; **б)** состоит из одной точки; **в)** состоит из двух точек; **г)** совпадает с $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$.

M$15\frac{1}{2}$◇2. Может ли множество предельных точек быть множеством всех чисел вида $1/k$ с $k \in \mathbb{N}$?

M$15\frac{1}{2}$◇3. Может ли бесконечное ограниченное множество не иметь предельных точек?

Замкнутые множества. Множество $Z \subset \mathbb{R}$ называется *замкнутым*, если оно содержит все свои предельные точки (в частности, если их у него вообще нет). Непустые ограниченные замкнутые множества называются *компактами*.

M$15\frac{1}{2}$◇4°. Докажите, что отрезок и прямая — замкнуты, а интервал и открытый луч — нет. Бывают ли дискретные незамкнутые множества?

M$15\frac{1}{2}$◇5°. Бывают ли бесконечные дискретные компакты?

M$15\frac{1}{2}$◇6°. Разбивается ли отрезок в объединение двух непересекающихся непустых замкнутых множеств? Перечислите все одновременно открытые и замкнутые подмножества в $\mathbb{R}$.

M$15\frac{1}{2}$◇7. Докажите, что множество $Z \subset \mathbb{R}$ замкнуто тогда и только тогда, когда его дополнение $\mathbb{R} \setminus Z = \{\, x \in \mathbb{R} \mid x \notin Z \,\}$ открыто.

M$15\frac{1}{2}$◇8. Докажите, что пересечение любого набора замкнутых множеств замкнуто.

M$15\frac{1}{2}$◇9. Докажите, что объединение конечного набора замкнутых множеств замкнуто. Так ли это для бесконечных наборов?

M$15\frac{1}{2}$◇10 (лемма о вложенных компактах). Докажите, что любая последовательность вложенных компактов $K_1 \supset K_2 \supset K_3 \supset \cdots$ имеет непустое пересечение: $\bigcap K_\nu \neq \varnothing$.

M$15\frac{1}{2}$◇11* (лемма о конечном покрытии). Докажите, что $K \subset \mathbb{R}$ компакт тогда и только тогда, когда любое его покрытие интервалами содержит конечное подпокрытие.

Канторово множество. Определим по индукции последовательность компактов $K_\nu \subset [0,1]$ следующим образом. Каждый K_ν является объединением 2^ν отрезков: $K_{\nu+1}$ получается из K_ν выкидыванием открытой (т. е. без концевых точек) средней трети из каждого отрезка, входящего в K_ν, а $K_0 = [0,1]$. Пересечение $\mathfrak{K} \overset{\text{def}}{=} \bigcap\limits_\nu K_\nu$ называется *канторовым множеством* (в честь Георга Кантора). Иначе $\mathfrak{K} \subset [0,1]$ можно определить как множество всех чисел $\varkappa \in [0,1]$, которые в троичной системе счисления можно записать при помощи БДД, не содержащей 1, причём не требуется, чтобы эта запись была стандартной (т. е. она может оканчиваться на одни двойки).

M$15\frac{1}{2}$◇12. Докажите, что канторово множество имеет мощность континуума, но покрывается конечным набором интервалов со сколь угодно малой суммой длин.

M$15\frac{1}{2}$◇13. Содержит ли канторово множество: **а)** интервалы? **б)** изолированные точки?

Конденсация несчётных множеств. Элемент $a \in M$ произвольного несчётного множества $M \subset \mathbb{R}$ называется его *точкой конденсации*, если $D_\varepsilon(a) \cap M$ несчётно $\forall\, \varepsilon > 0$.

M$15\frac{1}{2}$◇14*. Докажите, что множество точек $b \in M$, не являющихся точками конденсации, конечно или счётно.

M$15\frac{1}{2}$◇15*. Может ли множество точек конденсации иметь изолированные точки?

M$15\frac{1}{2}$◇16*. Докажите, что множество точек конденсации замкнуто.

M$15\frac{1}{2}$◇17*. Докажите, что любое замкнутое подмножество в $\mathbb{R}$ или пусто, или конечно, или счётно, или имеет мощность континуума.

Радикальные преобразования

(напоминания из алгебры)

… здесь вам не университет: тут головой думать надо!
(из армейского юмора)

Напомним, что через $|a-b|$ (читается «модуль a минус b») обозначается расстояние между точками a и b на числовой прямой $\mathbb{R}^1$. Таким образом, $|a-b| = |b-a|$ равно той из двух разностей $(a-b)$, $(b-a)$, которая неотрицательна. Вместо $|a-0| = |0-a|$ пишут просто $|a|$.

М16◇1°. Из перечисленных ниже утверждений верные докажите, а неверные опровергните и, по возможности, исправьте: **а)** $\dfrac{\alpha}{\beta} < \dfrac{a}{b} \Rightarrow \dfrac{\alpha}{\beta} < \dfrac{\alpha+a}{\beta+b} < \dfrac{a}{b}$ $\forall\, \alpha, a, \beta, b \in \mathbb{R}$ с $\beta, b > 0$;

б) $a \leqslant b$ и $\alpha \leqslant \beta \Rightarrow \dfrac{a}{\beta} \leqslant \dfrac{b}{\alpha}$ $\forall\, a, b, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$; **в)** $|a-b| + |b-c| = |a-c|$ $\forall\, a, b, c \in \mathbb{R}$;

г) $|a| - |b| \leqslant |a-b|$ $\forall\, a, b \in \mathbb{R}$; **д)** $|a| + |b| \geqslant |a+b|$ $\forall\, a, b \in \mathbb{R}$; **е)** $\sqrt{x^2} = x$ $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

М16◇2. Без помощи калькулятора выясните, что больше:

а) $\sqrt{37} - 6$ или $1/10$; **б)** $\sqrt{3} - \sqrt{2}$ или $\sqrt{5} - 2$ **в)** $\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}$ или 5; **г)** $\sqrt[3]{60}$ или $2 + \sqrt[3]{7}$.

М16◇3. Какие из перечисленных ниже пар чисел обратны друг другу:

а) $2 - \sqrt{3}$ и $2 + \sqrt{3}$; **б)** $\left(2\sqrt{20} + 9\right)^{100}$ и $\left(2\sqrt{20} - 9\right)^{100}$; **в)** $\left(7 + 5\sqrt{2}\right)^3$ и $\left(7 - 5\sqrt{2}\right)^3$,;

г) $\left(7 + 5\sqrt{2}\right)^4$ и $\left(7 - 5\sqrt{2}\right)^4$; **д)** $3 + \sqrt{2}$ и $3 - \sqrt{2}$; **е)** $\sqrt[3]{9} - 3$ и $3\sqrt[3]{3} + 2\sqrt[3]{9} + 4$.

М16◇4. Избавьтесь от иррациональности в знаменателе: **а)** $\dfrac{3}{\sqrt{7}-2}$; **б)** $\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{7}}{\sqrt{5}+\sqrt{7}}$;

в) $\dfrac{2}{\sqrt[3]{3}+1}$; **г)** $\dfrac{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{5}}$; **д)** $\dfrac{1}{1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}}$; **е*)** $\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt[3]{2}}$; **ж*)** $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}+\sqrt[3]{z}}$.

М16◇5 (формулы Виета). В произведении $(x-\vartheta_1)(x-\vartheta_2)\cdots(x-\vartheta_m)$ раскрыли скобки и сгруппировали слагаемые по степеням x. Чему будет равен коэффициент при x^k? Из скольких слагаемых он состоит?

М16◇6. Придумайте многочлен с целыми коэффициентами, среди корней которого есть:

а) $1 + \sqrt{7}$; **б)** $5 - 2\sqrt{3}$; **в)** $\sqrt{5}$ и $\sqrt{7}$; **г)** $\sqrt{3} + \sqrt{2}$.

М16◇7. Какими должны быть α, β, чтобы $\left(\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}\right)^2 = a + \sqrt{b}$ для данных a, b? Выделяя полный квадрат или куб, избавьтесь от наружнего радикала в выражениях:

а) $\sqrt{3 + 2\sqrt{2}}$; **б)** $\sqrt{28 + 10\sqrt{3}}$; **в)** $\sqrt{67 + 12\sqrt{7}}$; **г)** $\sqrt{12 + 2\sqrt{35}}$; **д)** $\sqrt[3]{16 + 8\sqrt{5}}$;

е) $\sqrt[3]{37 + 30\sqrt{3}}$; **ж)** $\sqrt[3]{7 + 5\sqrt{2}}$; **з)** $\sqrt[3]{9\sqrt{3} - 11\sqrt{2}}$; **и)** $\sqrt[3]{21\sqrt{6} - 23\sqrt{5}}$.

М16◇8. Пусть $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$. Верно ли, что при $\alpha \neq \beta$ числа $\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$ и $\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta}$ либо оба рациональны, либо оба иррациональны?

М16◇9. Рациональны ли числа: **а)** $\sqrt{5} + \sqrt{3}$; **б)** $\sqrt{7 + 4\sqrt{3}} - \sqrt{3}$; **в)** $\left(\sqrt{5}+1\right)^3 - \left(\sqrt{5}-1\right)^3$;

г) $\left(1+\sqrt{2}\right)^5 + \left(1-\sqrt{2}\right)^5$; **д)** $\left(1+\sqrt{3}\right)^{11} + \left(1-\sqrt{3}\right)^{11}$; **е)** $\left(\sqrt{3}+1\right)^{10} - \left(\sqrt{3}-1\right)^{10}$.

М16◇10. Вычислите первую тысячу знаков после запятой у

а) $\left(12 - \sqrt{143}\right)^{2000}$; **б*)** $\left(7 + \sqrt{48}\right)^{1999}$; **в*)** $\left(7 + \sqrt{50}\right)^{2000}$; **г*)** $\left(7 + \sqrt{50}\right)^{2001}$.

М16◇11*. Чётна или нечётна целая часть числа $\left(45 + \sqrt{1975}\right)^{30}$?

Графики и кривые

М17◇1. Функция $y = f(x)$ имеет график, изображённый на рис. 17 - 1. Нарисуйте (поточнее) графики функций: **а)** $2\,f(x)$; **б)** $f(2x)$; **в)** $f(x+2)$; **г)** $f(x)+2$; **д)** $f(-x)$; **е)** $f(|x|)$; **ж)** $-|f(-|x|)|$; **з)** $3-f(x)$; **и)** $3\,f(x)+2$; **к)** $f\left({(x-3)}/{2}\right)$; **л)** $f\left(({x}/{2})-3\right)$; **м)** $3-2f(3-2x)$; **н)** $f\left({1}/{x}\right)$. **о)** $x\,f(x)$; **п)** ${1}/{f(x)}$; **р)** $1-\left|f\left({(1-|x|)}/{3}\right)\right|$;

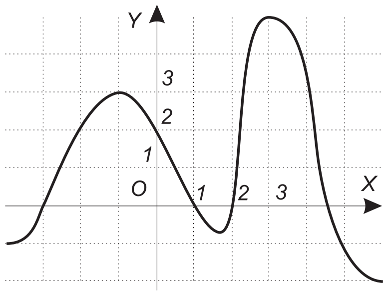


Рис. 17 - 1. График $y = f(x)$.

М17◇2. Выразите функцию $g(x)$ через функцию $f(x)$, если известно, что график g получается из графика f

а) параллельным переносом на вектор $(3,5)$;
б) сжатием в 2 раза к оси OY;
в) симметрией относительно оси OX; **г)** симметрией относительно прямой $x=3$;
д) растяжением в 3 раза от прямой $y=-1$; **е)** симметрией относительно точки O;
ж) гомотетией с коэффициентом 2 относительно точки O;
з) гомотетией с коэффициентом $-{1}/{3}$ относительно точки $(-3,2)$.

М17◇3. Постройте графики: **а)** ${1}/{x}$; **б)** $1-\left({2}/{x+1}\right)$; **в)** ${(x+1)}/{(x-1)}$; **г)** ${(2x+3)}/{(2-3x)}$; **д)** ${(ax+b)}/{(cx+d)}$, где $ad \neq bc$. **е)** x^2; **ж)** $3-2(x-5)^2$; **з)** ax^2+bx+c, где $a \neq 0$.

М17◇4. Опишите геометрическое место середин произвольного семейства параллельных хорд данной параболы.

М17◇5. Чтобы познакомиться с Машенькой, Вовочка стёр в её тетрадке оси координат у графиков **а)** $y=x^2$ **б)** $y={1}/{x}$. Как Машеньке точно восстановить их циркулем и линейкой?

М17◇6. Множество всех решений (x,y) уравнения $\Phi(x,y)=0$ представляет собой кривую на рис. 17 - 2. Нарисуйте (поточнее) кривые, заданные уравнениями: **а)** $\Phi(x+2,y-1)=0$; **б)** $\Phi(-x,-y)=0$; **в)** $\Phi(2x,y)=0$; **г)** $\Phi\left({x}/{2},2y\right)=0$; **д)** $\Phi(y,x)=0$; **е)** $\Phi(|y|,x)=0$; **ж)** $\Phi(x+y,x-y)=0$; **з)** $\Phi\left({(x\sqrt{3}-y)}/{2}, {(x+y\sqrt{3})}/{2}\right)=0$.

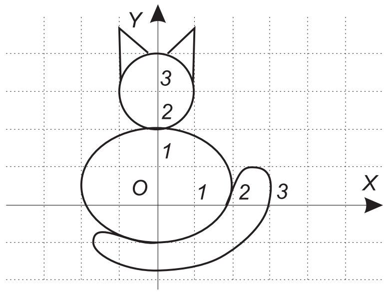


Рис. 17 - 2. Кривая $\Phi(x,y)=0$.

М17◇7. Напишите какое-нибудь уравнение, задающее кривую, получающуюся из показанной на рис. 17 - 2 кривой $\Phi(x,y)=0$:

а) параллельным переносом на вектор $(-2,3)$;
б) растяжением в 2 раза от оси OX;
в) симметрией относительно оси OY;
г) симметрией относительно прямой $y=-2$;
д) симметрией относительно начала координат;
е) гомотетией с коэффициентом 2 относительно начала координат;
ж) поворотом на 45° вокруг начала координат; **з)** сжатием в 3 раза к прямой $x=1$;
и) гомотетией с коэффициентом $-{1}/{3}$ относительно точки $(1,-1)$;
к) объединением кривой $\Phi(x,y)=0$ с графиком функции $y=f(x)$.

М17◇8. Нарисуйте кривые: **а)** $x^2-y^2=1$; **б)** $4\,x^2+9\,y^2=36$; **в)** $16\,x^2-25\,y^2=400$.

М17◇9. Напишите уравнение, задающее **а)** окружность радиуса 3 с центром в точке $(-5,2)$;
б) гиперболу $y={1}/{x}$, сдвинутую и повёрнутую так, что её центр находится в точке $(-5,2)$, а асимптоты составляют углы в 45° с осью OX;
в) параболу $y=x^2$, сдвинутую и повёрнутую так, что её вершина находится в точке $(-1,-1)$, а ось идёт под углом 45° к оси OX.

Получение оценок

Матанализ есть искусство получения точных результатов посредством приближённых оценок.
(из профессорско - преподавательского фолькльлора)

М18◇1 (неравенство Бернулли). Верно ли, что $(1+\alpha)^n \geqslant 1+n\,\alpha \quad \forall\, n\in\mathbb{N}$ и произвольного действительного $\alpha > -1$?

М18◇2. Укажите какое-нибудь[1] $m\in\mathbb{N}$, чтобы при всех целых $n \geqslant m$ выполнялась оценка:

а) $1000\cdot 2^n < n!$; **б)** $100\cdot n^2 < 2^n$; **в)** $10\cdot n^3 < 2^n$; **г)** $n^{10} < 2^n$; **д)** $(1+10^{-4})^n > 10^6$;
е) $(1-10^{-4})^n < 10^{-6}$; **ж)** $1/(k+1) + 1/(k+2) + \cdots + 1/(k+n) > 1/2$.

Оценки функций. Функция $X \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, заданная на некотором множестве X, называется *ограниченной сверху* (соотв. *ограниченной снизу* и просто *ограниченной*) на X, если таковым является множество её значений $f(X) \subset \mathbb{R}$. Иначе говоря, f ограничена сверху, если $\exists\, c\in\mathbb{R} : f(x) < c \quad \forall\, x\in X$; f ограничена снизу, если $\exists\, c\in\mathbb{R} : f(x) > c \quad \forall\, x\in X$; f ограничена, если $\exists\, c_1, c_2 \in\mathbb{R} : c_1 < f(x) < c_2 \quad \forall\, x\in X$.

М18◇3. Исследуйте каждую из функций: $x^3 - 10\,x$, $\dfrac{x^3-x+1}{x^4+1}$, $\dfrac{x^4-x+1}{x^4+1}$, $\dfrac{x^5-x+1}{x^4+1}$ на ограниченность **а)** на отрезке $[-100, 100]$; **б)** на всей прямой.

М18◇4. Какие из перечисленных ниже функций ограничены на своей области определения и с какой стороны: **а)** $\sqrt{x^2+1} - x$; **б)** $\sqrt{x+1} - \sqrt{x}$; **в)** $\dfrac{5\,x}{\sqrt{2\,x+1} - \sqrt{2\,x-1}}$; **г)** $\dfrac{3+2\,x}{3\,x-2}$.

М18◇5. Ограничены ли сверху последовательности: **а)** $a_n = C_n^{100}/n^{100}$? **б)** $b_n = \left(1 + 1/n\right)^n$?

Оценки рядов. Бесконечные суммы типа $\sum\limits_{\nu\geqslant 1} a_\nu = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$ называются *рядами*. Конечная сумма первых m членов такого ряда $s_m = \sum\limits_{\nu=1}^{m} a_\nu = a_1 + a_2 + \cdots + a_m$ называется его *частичной суммой*. Ряд *неотрицательных* действительных чисел называется *сходящимся*, если множество значений его частичных сумм ограничено сверху; твг этого множества называется *суммой* ряда. Если частичные суммы не ограничены, то говорят, что ряд *расходится*.

М18◇6. Докажите, что сумма положительной убывающей бесконечной геометрической прогрессии сходится и выразите её (если Вы до сих пор этого не сделали) через первое слагаемое и знаменатель.

М18◇7. Верно ли, что любая ε-окрестность любого числа содержит бесконечно много рациональных чисел? Можно ли покрыть все рациональные числа системой интервалов, суммарная длина которых меньше любого наперёд заданного $\varepsilon > 0$?

М18◇8 (число e). Докажите, что число $e \overset{\text{def}}{=} \sum\limits_{k\geqslant 0} 1/k! = 1 + 1 + 1/2 + 1/6 + 1/24 + \cdots$

а) существует; **б)** удовлетворяет неравенствам $2{,}7 < e < 2{,}8$; **в*)** иррационально.

М18◇9 (гармонический ряд). Сходится ли ряд: $\sum\limits_{k\geqslant 1} 1/k = 1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + \cdots$?

М18◇10. Сходиться ли ряд, составленный из квадратов членов гармонического ряда?

М18◇11* (задача о стирке). Имеется 10 *кг* грязного белья и 10 *кг* чистой воды. При погружении любой части белья в любое количество воды грязь распределяется в их общей массе равномерно. Можно ли уменьшить количество грязи в белье более чем в **а)** 2,5 **б)** 3 **в)** 103 раза?

М18◇12*. Из гармонического ряда выкинули все слагаемые, в десятичной записи которых участвует цифра 9. Докажите, что сумма оставшихся слагаемых не превышает 100.

[1]подчеркнём, что «какое-нибудь» вовсе не означает «как можно меньшее»

Последовательности

Последовательность элементов множества X — это отображение $\mathbb{N} \xrightarrow{x} X$. Вместо $x(n)$ обычно пишут x_n и называют его *n-тым членом* последовательности. Последовательность x_1, x_2, x_3, … коротко обозначается через (x_n). Отметим, что *последовательность* не следует путать с *множеством* её значений, и неверно думать о последовательности как о «занумерованном множестве». Всюду в этом листке речь будет идти о *числовых* последовательностях, т. е. о последовательностях $\mathbb{N} \xrightarrow{x} \mathbb{R}$.

М19◇1°. Дайте определения числовых последовательностей: **а)** ограниченной; **б)** неограниченной; **в)** монотонно возрастающей; **г)** монотонно невозрастающей.

М19◇2. Изобразите последовательности и исследуйте их на ограниченность и монотонность:
а) $x_n = 1$; **б)** $x_n = n$; **в)** $x_n = (-1)^n/n$; **г)** $0, 1/2, 0, 1/3, 0, 1/4, \ldots$; **д)** $x_n = (n-3)/(2n+5)$; **е)** $x_n = (n^2+1)/(2n+1)$; **ж)** $x_n = (n+1)/(2n^2-1)$.

М19◇3. Дайте определение *подпоследовательности* последовательности x_1, x_2, x_3, … .

Пределы. Число p называется *пределом* последовательности (x_n), если любая его ε-окрестность $D_\varepsilon(p)$ содержит все члены этой последовательности, кроме конечного числа; более формально это записывается так: $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant N \;\; |x_n - p| < \varepsilon$. Обозначение: $p = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ или $x_n \to p$ при $n \to \infty$. Последовательность, у которой есть предел, называется *сходящейся*, а у которой нет — *расходящейся*.

М19◇4°. Без отрицаний скажите, что значит, что $q \in \mathbb{R}$ не есть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, и что значит, что (x_n) расходится. Бывают ли неограниченные сходящиеся последовательности?

М19◇5°. Может ли последовательность не иметь ни одного или иметь несколько пределов?

М19◇6. Выясните, какие из последовательностей сходятся и для сходящихся найдите предел и явно укажите для произвольно заданного $\varepsilon > 0$ какой-либо номер N, после которого все x_n заведомо лежат в ε-окрестности предела **а)** $1/2, -1, 1/4, ; -1/3, 1/8, -1/5, \ldots$; **б)** $1/n$; **в)** $(-1)^n$; **г)** $2^n/n!$; **д)** $\left((-1)^n \cos n\right)/n^2$; **е)** $n/(n^2+1)$; **ж)** q^n, $q \in \mathbb{R}$; **з)** $1 + q + q^2 + \cdots + q^n$, $q \in \mathbb{R}$; **и)** $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$; **к)** $\sqrt{n^2+n} - n;$; **л)** $(n^a)/(b^n)$; **м*)** $\sqrt[n]{n}$.

М19◇7*. Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + {}^1\!/_n\right)^n = e$ (число e определялось в зад. М18◇8).

М19◇8°. Дайте определение тому, что при $n \to \infty$ **а)** $a_n \to +\infty$, **б)** $a_n \to -\infty$, **в)** $a_n \to \infty$. Верно ли, что $(a_n) \to \infty \iff \lim\limits_{n\to\infty} a_n^{-1} = 0$?

М19◇9. Можно что-либо утверждать о сходимости последовательностей: $a_n \pm b_n$; $a_n \cdot b_n$ b_n/a_n; a_n/b_n (у двух последних предполагается, что $a_n, b_n \neq 0 \;\forall\; n \gg 0$), если известно, что последовательность b_n ограничена, а a_n стремится **а)** к 0 **б)** к ∞?

Предельные точки. Число p называется *предельной точкой* последовательности (x_n), если любая его ε-окрестность $D_\varepsilon(p)$ содержит бесконечно много членов этой последовательности; иначе это записывается так: $\forall \varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N} \;\; \exists n \geqslant N : |x_n - p| < \varepsilon$.

М19◇10°. Убедитесь, что эти два определения действительно эквивалентны. Обязана ли предельная точка быть пределом? А предел — предельной точкой?

М19◇11. Может ли множеством всех предельных точек последовательности быть:
а) $\varnothing$? **б)** n различных точек ($n = 1, 2, \ldots$)? **в)** $\mathbb{Z}$? **г)** $\mathbb{Q}$? **д)** $\mathbb{R}$?

М19◇12. У последовательности (a_n) нет предельных точек. Верно ли, что $a_n \to \infty$?

М19◇13. Обязана ли сходиться **а)** произвольная **б)** ограниченная последовательность, у которой есть ровно одна предельная точка?

М19◇14. Слева или справа от любого $x \in \mathbb{R}$ лежит лишь конечное число членов последовательности (a_n). Верно ли, что (a_n) либо сходится либо стремится к $\pm\infty$?

Пределы последовательностей

М20◇1 (теоремы Больцано - Вейерштрасса). Любая ли ограниченная последовательность: **а)** имеет предельную точку? **б)** содержит подпоследовательность, имеющую предел? **в)** если монотонно неубывает (или монотонно невозрастает), то имеет предел?

М20◇2. Пусть (a_n) и (b_n) имеют конечные пределы $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \beta$. Докажите, что **а)** $a_n \pm b_n$, **б)** $a_n \cdot b_n$, **в)** $(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)/n$, а если $\beta \neq 0$, то и **г)** $1/b_n$, **д)** a_n/b_n тоже сходятся, и выразите их пределы через α и β.

М20◇3. Вычислите пределы (при $n \to \infty$) или докажите расходимость последовательностей: **а)** $(3n^3 - 5n + 7)/(5n^3 + 7n^2 - 11)$; **б)** $\sqrt{n^2+3n} - \sqrt{n^2-5n}$; **в)** $\sqrt{n^2+2n^3} - \sqrt{2n^2+n^3}$; **г)** $\sqrt[n]{n!}$; **д*)** $\sqrt{2}\sqrt[4]{2}\sqrt[8]{2}\cdots\sqrt[2^n]{2}$; **е*)** $\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}_{n \text{ радикалов}}$; **ж*)** $(1-1/n)^n$; **з*)** $(1+3/n)^n$.

М20◇4. Будем называть *перемешиванием* последовательности $\mathbb{N} \xrightarrow{a} \mathbb{R}$ её композицию с произвольным взаимно однозначным отображением $\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$. Влияет ли перемешивание на сходимость/расходимость и значение предела (в том числе, когда $a_n \to \pm\infty, \infty$)?

М20◇5 (критерий Коши). Последовательность a_n называется *последовательностью Коши*, если $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N \in \mathbb{N} : |a_{n_1} - a_{n_2}| < \varepsilon\ \forall\, n_1, n_2 > N$. Докажите, что последовательность имеет конечный предел тогда и только тогда, когда она является последовательностью Коши.

М20◇6*. Две последовательности Коши (a_n) и (b_n) называются *эквивалентными*, если любое перемешивание последовательности a_1, b_1, a_2, b_2, … тоже является последовательностью Коши. Назовём действительным числом Коши класс эквивалентных рациональных последовательностей Коши. Определите сумму и произведение действительных чисел Коши и докажите, что множество действительных чисел Коши изоморфно (с сохранением операций) множеству действительных чисел, определённых через БДД или дедекиндовы сечения (см. зад. М14◇9).

Абсолютная и условная сходимость рядов. Ряд $\sum\limits_{i\geqslant 1} a_i$ произвольных чисел $a_i \in \mathbb{R}$ называется *сходящимся*, если последовательность его частичных сумм $s_n = a_1 + \cdots + a_n$ имеет конечный предел (он называется *суммой ряда*). Сходящийся ряд называется *абсолютно сходящимся*, если его ряд абсолютных величин $\sum\limits_{i\geqslant 1} |a_i|$ тоже сходится; в противном случае ряд называют *условно сходящимся*.

М20◇7. Убедитесь, что для ряда неотрицательных чисел новое определение сходимости, данное в этом листке, согласуется с определением из позапрошлого листка.

М20◇8. Чему равен $\lim\limits_{i\to\infty} a_i$, если ряд $\sum\limits_{i\geqslant 0} a_i$ сходится?

М20◇9. Сходится ли ряд $1 - 1/2 + 1/3 - 1/4 + \cdots$ **а)** абсолютно? **б)** условно?

М20◇10 (критерий Коши). Докажите, что ряд $\sum\limits_{i\geqslant 1} a_i$ сходится тогда и только тогда, когда $\forall\, \varepsilon > 0\quad \exists\, N \in \mathbb{N} : |a_{n_1} + a_{n_1+1} + \cdots + a_{n_2}| < \varepsilon$ для всех номеров $n_2 > n_1 > N$.

М20◇11*. Докажите, что при помощи подходящего перемешивания слагаемых условно сходящегося ряда его сумму можно сделать равной любому наперёд заданному числу, а также сделать ряд расходящимся.

М20◇12. Можно ли перемешать слагаемые ряда $1-1+1-1+\cdots$ так, чтоб он стал сходиться?

М20◇13*. Изменяется ли сумма абсолютно сходящегося ряда при перемешивании слагаемых?

Цепные дроби

М$20\frac{1}{2}\diamond 1^{\circ}$ (продолжение зад. М$4\frac{1}{2}\diamond 9$ о кузнечиках). Нарисуем в первом координатном квадранте луч $y = \alpha x$ с *иррациональным* $\alpha > 0$ и рассмотрим ломаные, ограничивающие выпуклые оболочки целых точек, лежащих, соответственно, выше и ниже этого луча (см. рис.). Занумеруем вершины T_i нижней ломаной чётными, а верхней — нечётными целыми индексами подряд слева направо так, чтобы $[T_0T_2]$ был *первым невертикальным* ребром на нижней ломаной, и обозначим через (p_n, q_n) координаты точки T_n, а через a_n — число кусков, на которые делится ребро $[T_{n-2}T_n]$ лежащими на нём целыми точками. Пусть в зад. М$4\frac{1}{2}\diamond 9$ кузнечики скачут из начального положения так, что каждый раз прыгает крайний кузнечик, находящийся по ту же сторону от луча $y = \alpha x$, что и средний. Докажите что, кузнечики побывают во всех целых точках обеих граничных ломаных (и только в них), и что

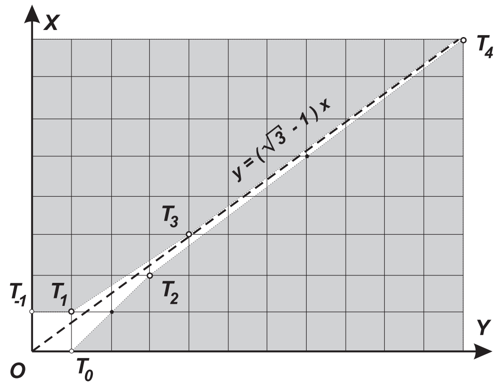


Рис. $20\frac{1}{2}$ - 1. Иррациональный луч.

а) последовательности $\left(\dfrac{p_{2n}}{q_{2n}}\right)$ и $\left(\dfrac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}}\right)$ монотонны; **б)** $\begin{cases} p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2} \\ q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2} \end{cases}$

в) $\begin{cases} p_{n-1}q_n - p_n q_{n-1} = (-1)^n \\ p_{n-2}q_n - p_n q_{n-2} = (-1)^{n-1}a_n \end{cases}$ **г)** $\dfrac{1}{q_n(q_n + q_{n+1})} < \left|\alpha - \dfrac{p_n}{q_n}\right| < \dfrac{1}{q_n q_{n+1}}$; **д)** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{p_n}{q_n} = \alpha$.

М$20\frac{1}{2}\diamond 2$. Что изменится, если в зад. М$20\frac{1}{2}\diamond 1$ взять $\alpha \in \mathbb{Q}$?

М$20\frac{1}{2}\diamond 3$. Для произвольного $\alpha \in \mathbb{R}$ образуем последовательности (a_n) и (r_n), полагая $\forall\ i \geqslant 0$ $a_i = [r_i]$ (целая часть r_i), $r_{i+1} = (r_i - a_i)^{-1}$ и $r_0 = \alpha$. Как связаны эти a_i с одноимёнными числами из зад. М$20\frac{1}{2}\diamond 1$, если $\alpha > 0$?

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots}}$$

Рис. $20\frac{1}{2}$ - 2. Дробь.

Цепная дробь — это конечное или бесконечное выражение на рис. $20\frac{1}{2}$ - 2 или более экономно: $a_0 + 1/(a_1 + 1/(a_2 + \ \ldots\ ))$. Величины a_i называются *элементами* цепной дроби (последний элемент конечной цепной дроби всегда предполагается отличным от 1). Если $a_i \in \mathbb{R}$ и существует конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty} a_0 + 1/(a_1 + 1/(a_2 + \ \ldots\ + 1/(a_{n-1} + 1/a_n)\ldots)) = \alpha$, то дробь ($20\frac{1}{2}$ - 2) называется *сходящейся*, а α называется её *значением*. Будем называть цепную дробь *канонической*, если $a_0 \in \mathbb{Z}$, и $a_i \in \mathbb{N}$ при $i \geqslant 1$.

М$20\frac{1}{2}\diamond 4$. Докажите, что все бесконечные канонические цепные дроби сходятся, и, сопоставляя каноническим цепным дробям (как конечным, так и бесконечным) их значения, мы получаем биекцию между множеством таких дробей и $\mathbb{R}$.

М$20\frac{1}{2}\diamond 5$. Вычислите $1 + 1/(2 + 1/(3 + 1/(1 + 1/(2 + 1/(3 + \cdots)))))$. Всякая ли периодическая каноническая дробь удовлетворяет квадратному уравнению с целыми коэффициентами?

М$20\frac{1}{2}\diamond 6$. Разложите в канонические цепные дроби числа **а)** $\sqrt{3}$, **б)** $\sqrt{5}$, **в)** $\sqrt{43}$, **г)** $\sqrt{57}$.

Остатки и конвергенты. Любой начальный отрезок $a_0 + 1/(a_1 + 1/(a_2 + \ldots + 1/(a_{n-1} + 1/a_n)\ldots))$ цепной дроби ($20\frac{1}{2}$ - 2) можно формально свернуть в обыкновенную дробь p_n/q_n, последовательно выполнив (без «сокращений») все предписанные справа налево действия. Так, $p_0/q_0 = a_0/1$, $p_1/q_1 = (a_0a_1 + 1)/a_1$ и т. д. Такая p_n/q_n называется n-той *подходящей дробью* (или *конвергентой*) цепной дроби ($20\frac{1}{2}$ - 2). Если ($20\frac{1}{2}$ - 2) сходится, то числа $r_n \in \mathbb{R}$, такие что $a_0 + 1/(a_1 + 1/(a_2 + \ \ldots\ )) = a_0 + 1/(a_1 + 1/(a_2 + \ldots + 1/(a_{n-1} + 1/r_n)\ldots))$, называются её *остатками*; иными словами, $r_n = a_n + 1/(a_{n+1} + 1/(a_{n+2} + \ \ldots\ ))$.

М$20\frac{1}{2}\diamond 7$. Как связаны конвергенты канонической цепной дроби с (p_n, q_n) из зад. М$20\frac{1}{2}\diamond 1$?

М$20\frac{1}{2}\diamond 8$. Какие из соотношений зад. М$20\frac{1}{2}\diamond 1$ верны для цепных дробей с произвольными $a_i \in \mathbb{R}$? Докажите, что если ($20\frac{1}{2}$ - 2) сходится к α, то $\alpha = (r_n p_{n-1} - p_{n-2}) \,/\, (r_n q_{n-1} - q_{n-2})$ $\forall n$.

М$20\frac{1}{2}\diamond 9^{*}$. Докажите, что цепная дробь ($20\frac{1}{2}$ - 2) с положительными $a_i \in \mathbb{R}$ сходится тогда и только тогда, когда расходится ряд $\sum a_i$.

Квадратичные иррациональности

М$20\frac{2}{3}\diamond$1. Пусть иррациональное $\alpha\in\mathbb{R}$ является корнем квадратного уравнения с целыми коэффициентами. Проверьте, что все остатки r_n канонического разложения α в цепную дробь также являются корнями квадратных уравнений с целыми коэффициентами. Верно ли, что:

а) у всех этих уравнений один и тот же дискриминант?

б) множество коэффициентов этих уравнений ограничено?

М$20\frac{2}{3}\diamond$2 (теорема Лагранжа). Докажите, что вещественное число тогда и только тогда является корнем квадратного уравнения с целыми коэффициентами, когда его каноническое представление цепной дробью периодично.

Диофантовы приближения. Пусть $\alpha\in\mathbb{R}$ — произвольное число. Рациональное число p/q ($p\in\mathbb{Z}$, $q\in\mathbb{N}$) называется *наилучшим приближением* к α, если для любого другого рационального числа $m/n\neq p/q$ ($m\in\mathbb{Z}$, $n\in\mathbb{N}$) со знаменателем $m\leqslant q$ имеет место строгое неравенство $|\alpha n-m|>|\alpha q-p|$.

М$20\frac{2}{3}\diamond3^\circ$. Докажите, что любое иррациональное $\alpha\in\mathbb{R}$ обладает наилучшими приближениями со сколь угодно большим знаменателем, а также что все наилучшие приближения несократимы и исчерпываются подходящими дробями канонического разложения α в цепную дробь.

М$20\frac{2}{3}\diamond4^\circ$. Докажите, что для любого иррационального числа α существует бесконечно много несократимых дробей x/y с $x\in\mathbb{Z}$, $y\in\mathbb{N}$, удовлетворяющих неравенству $\left|\alpha-x/y\right|<1/y^2$.

М$20\frac{2}{3}\diamond$5. Нарисуйте кривые $x^2-y^2=1$ и $x^2-3\,y^2=1$. Есть ли на них целые точки кроме $(\pm1,0)$, и если да, то конечно ли множество таких точек?

М$20\frac{2}{3}\diamond$6. Для любого ли натурального d, не делящегося на квадраты, можно подобрать $m\in\mathbb{N}$ так, чтобы **а)** неравенство $x^2-dy^2\leqslant m$ **б)** уравнение $x^2-dy^2=m$ имело бесконечно много целых решений (x,y) с $x,y\neq0$?

Квадратичные расширения, норма и сопряжение. Пусть $d\in\mathbb{N}$ не делится на квадраты; положим $\mathbb{Q}(\sqrt{d})\overset{\text{def}}{=}\{\,x+y\sqrt{d}\mid x,y,\in\mathbb{Q}\}$ и $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]\overset{\text{def}}{=}\{\,p+q\sqrt{d}\mid p,q,\in\mathbb{Z}\}$. Отображение $\mathbb{Q}(\sqrt{d})\xrightarrow{\alpha\mapsto\overline{\alpha}}\mathbb{Q}(\sqrt{d})$, переводящее $\alpha=x+y\sqrt{d}$ в $\overline{\alpha}=x-y\sqrt{d}$ называется *сопряжением*, а отображение $\mathbb{Q}(\sqrt{d})\xrightarrow{N}\mathbb{Q}$, переводящее α в $N(\alpha)\overset{\text{def}}{=}\alpha\overline{\alpha}=x^2-dy^2$ называется *нормой*.

М$20\frac{2}{3}\diamond7^\circ$. Проверьте, что $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ и $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ замкнуты относительно сложения, вычитания и умножения. Для $\alpha\in\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ выразите α^{-1} через $\overline{\alpha}$ и $N(\alpha)$. Верно ли, что:

а) $\overline{\alpha_1\pm\alpha_2}=\overline{\alpha_1}\pm\overline{\alpha_2}$? **б)** $\overline{\alpha_1\cdot\alpha_2}=\overline{\alpha_1}\cdot\overline{\alpha_2}$? **в)** $N(\overline{\alpha})=N(\alpha)$? **г)** $N(\alpha_1\alpha_2)=N(\alpha_1)N(\alpha_2)$?

д) $\vartheta\in\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ тогда и только тогда обратим в $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$, когда $N(\vartheta)=\pm1$?

е) множество всех элементов $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ с нормой 1 замкнуто относительно умножения?

М$20\frac{2}{3}\diamond8^*$ (уравнение Пелля). Пусть целое $d\geqslant2$ не делится на квадраты; *уравнение Пелля*: $x^2-dy^2=1$ описывает все числа из $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ с нормой 1; у него, разумеется, есть 2 тривиальных решения $(\pm1,0)$, и вместе с каждым решением (x,y) решениями будут и все $(\pm x,\pm y)$. Решение (x_0,y_0) с *натуральными* x_0, y_0 называется *фундаментальным*, если вещественное число $x_0+y_0\sqrt{d}$ минимально среди всех чисел $x+y\sqrt{d}$ с нормой 1 и $x,y\in\mathbb{N}$. Докажите, что:

а) фундаментальное решение (x_0,y_0) существует и единственно;

б) x_0/y_0 есть подходящая дробь канонического разложения $\sqrt{d}$ в цепную дробь;

в) все $x+y\sqrt{d}$ с нормой 1 и $x,y\in\mathbb{N}$ исчерпываются числами $\left(x_0+y_0\sqrt{d}\right)^n$ с $n\in\mathbb{N}$.

М$20\frac{2}{3}\diamond$9. Найдите фундаментальные решения и опишите все целые решения уравнений[1]:

а) $x^2-5y^2=1$; **б)** $x^2-19y^2=1$; **в)** $x^2-43y^2=1$; **г)** $x^2-57y^2=1$.

[1] если Вы любите программирование, то можете написать программы для отыскания фундаментальных решений уравнения Пелля и разложения в цепные дроби чисел вида $x+y\sqrt{d}$ с $x,y,d\in\mathbb{Z}$

Повторение: топология числовой прямой

М21◇1. Имеется последовательность отрезков, каждый из которых содержится в предыдущем, и длина отрезков стремится к нулю. Докажите, что пересечение всех этих отрезков непусто и состоит из одной точки.

М21◇2. Докажите, что в любое покрытие отрезка интервалами содержит конечное подпокрытие.

М21◇3. Докажите, что любая ограниченная последовательность содержит сходящуюся подпоследовательность.

М21◇4. Докажите, что две последовательности вещественных чисел (a_n) и (b_n) тогда и только тогда сходятся к общему конечному пределу, когда $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n \in \mathbb{N} : \forall\, k, m > n\ |a_k - b_m| < \varepsilon$.

Открытые и замкнутые множества. Для любого вещественного $\varepsilon > 0$ интервал

$$D_\varepsilon(p) \stackrel{\text{def}}{=} (p-\varepsilon, p+\varepsilon) = \{\, x\in\mathbb{R} \,:\, |x-p| < \varepsilon \,\} = \{\, x\in\mathbb{R} \,:\, p-\varepsilon < x < p+\varepsilon \,\}$$

называется ε-окрестностью точки $p \in \mathbb{R}$. Точка $a \in M$ называется *изолированной* точкой множества $M \subset \mathbb{R}$, если у неё есть ε-окрестность, не содержащая никаких других точек M кроме a. Множество называется *дискретным*, если все его точки — изолированные. Точка $a \in \mathbb{R}$ называется *внутренней* точкой множества $M \subset \mathbb{R}$, если у неё есть ε-окрестность, целиком содержащаяся в M. Множество называется *открытым*, если все его точки — внутренние. Точка $a \in \mathbb{R}$ называется *предельной точкой* множества $M \subset \mathbb{R}$, если *любая* её ε-окрестность содержит какую-нибудь точку $x \in M$, отличную от a. Множество называется *замкнутым*, если оно содержит все свои предельные точки (в частности, если их у него вообще нет). Пустое множество, по определению, считается и открытым, и замкнутым. Непустые ограниченные замкнутые множества называются *компактами*.

М21◇5. Можно ли представить отрезок в виде объединения двух его собственных[1]
а) открытых **б)** замкнутых подмножеств?

М21◇6. Докажите, что множество $Z \subset \mathbb{R}$ замкнуто тогда и только тогда, когда его дополнение $\mathbb{R} \setminus Z = \{\, x \in \mathbb{R} \,|\, x \notin Z \,\}$ открыто. Перечислите все одновременно открытые и замкнутые подмножества в $\mathbb{R}$.

М21◇7. Докажите, что произвольное открытое множество на прямой представляет собой объединение не более, чем счетного, набора попарно непересекающихся интервалов (a_i, b_i), где $a_i < b_i \quad a_i \in \{-\infty\} \cup \mathbb{R},\ \ b_i \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

М21◇8. Докажите, что объединение двух замкнутых множеств и пересечение любого набора замкнутых множеств являются замкнутыми множествами. Сформулируйте и докажите соответствующие факты об открытых множествах.

М21◇9. Существует ли множество, множество всех предельных которого есть:
а) $\varnothing$; **б)** одна точка; **в)** две точки; **г)** $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$; **д)** $\{1/k \mid k\in\mathbb{N}\}$?

М21◇10. Может ли бесконечное ограниченное множество не иметь предельных точек?

М21◇11. Существуют ли на прямой бесконечные дискретные компакты?

М21◇12. Какие из перечисленных далее свойств непустого подмножества $Z \subset \mathbb{R}$ эквивалентны друг другу: **а)** Z компакт **б)** Z ограничено и замкнуто
в) любое покрытие Z открытыми множествами содержит конечное подпокрытие
г) любая последовательность элементов Z содержит подпоследовательность, которая имеет предел, принадлежащий Z.

[1] $S \subset M$ называется *собственным* подмножеством, если $S \neq \varnothing$ и $S \neq M$

Предел функции

Предел функции. Пусть функция f определена на некотором множестве $X \subset \mathbb{R}$ и $x_0 \in \mathbb{R}$ является его предельной точкой. Число p называется *пределом* функции f при $x \to x_0$ (обозначение: $p = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$), если для любого числа $\varepsilon > 0$ можно подобрать число $\delta > 0$ так, чтобы в каждой отличной от x_0 точке $x \in D_\delta(x_0) \cap X$ значение $f(x)$ принадлежало бы $D_\varepsilon(p)$. Более формально:

$$p = \lim_{x \to x_0} f(x) \overset{\text{def}}{\iff} \forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \; : \; \forall x \in X \quad \Big(x \neq x_0 \quad \& \quad |x - x_0| < \delta \Big) \Rightarrow |f(x) - p| < \varepsilon$$

М22◇1°. Верно ли, что $p = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ тогда и только тогда, когда для любой сходящейся к x_0 последовательности $(a_n) \subset X$ последовательность $b_n = f(a_n)$ сходится к p? Если да, объясните, почему, если нет, скажите, что надо исправить, чтобы получилась верная теорема.

М22◇2. Вычислите (с явным отысканием δ по ε) : **а)** $\lim\limits_{x \to 3} 4x$; **б)** $\lim\limits_{x \to 2} \sqrt[3]{x-1}$;
в) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^k - 1}{x - 1}$, $k \in \mathbb{N}$; **г)** $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^{-k} - 1}{x - 1}$, $k \in \mathbb{N}$; **д)** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1+x} - 1}{x}$; **е)** $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^{1/3} - 1}{x - 1}$.

М22◇3°. Пусть функции f, g обе определены на некотором множестве $X \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ является его предельной точкой, и существуют $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = p$ и $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = q$. Сформулируйте и докажите теоремы о пределах (при $x \to x_0$) функций:
а) $cf(x)$, где c – константа; **б)** $f(x) \pm g(x)$; **в)** $f(x) \cdot g(x)$; **г)** $f(x)/g(x)$.

М22◇4. Пусть функция $y = g(x)$ определена на некотором множестве $X \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ является его предельной точкой, существует $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = y_0$, и этот y_0 является предельной точкой для некоего множества $Y \supset g(X)$, на котором задана другая функция $z = f(y)$ с $\lim\limits_{y \to y_0} f(y) = z_0$. Верно ли, что $z_0 = \lim\limits_{x \to x_0} f\big(g(x)\big)$? Если да, объясните, почему, если нет, скажите, что надо исправить, чтобы получилась верная теорема.

М22◇5°. Дайте формальное определение тому, что $f(x) \to p$ при x, стремящемся к x_0 *слева* или *справа* (обозначения: $x \to x_0 - 0$ или $x \nearrow x_0$, и соответственно, $x \to x_0 + 0$ или $x \searrow x_0$).

М22◇6°. Дайте формальное определение тому, то $f(x) \to p$ при $x \to \infty$, а также при $x \to +\infty$ и $x \to -\infty$, в каждом из случаев: **а)** $p \in \mathbb{R}$, **б)** $p = \infty$, **в)** $p = +\infty$, **г)** $p = -\infty$,

М22◇7. Пусть $f(x) \to \infty$ при $x \to 0$. Можно ли что-то сказать про $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1}{f\left(1/x\right)}$?

М22◇8. Вычислите: **а)** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(1+mx)^n - (1+nx)^m}{x^2}$, где $m, n \in \mathbb{N}$; **б)** $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1}$;
в) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1}$; **г)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{(x+5)(x-7)} - x \right)$; **д)** $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{3}{1 - \sqrt{x}} - \dfrac{2}{1 - \sqrt[3]{x}} \right)$;
е) $\lim\limits_{x \to +\infty} x \left(\sqrt{x^2 + 2x} - 2\sqrt{x^2 + x} + x \right)$; **ж)** $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\sqrt[3]{x^3 + x^2 + 1} - \sqrt[3]{x^3 - x^2 + 1} \right)$.

Асимптоты. Прямая, заданная уравнением $y = ax + b$, называется (*наклонной*) *асимптотой*[1] графика функции $y = f(x)$ при $x \to +\infty$ (соотв. при $x \to -\infty$), если $f(x)$ определена при всех $x \gg 0$ (соотв. $x \ll 0$) и $|ax + b - f(x)| \to 0$ при $x \to +\infty$ (соотв. $x \to -\infty$). Прямая $x = x_0$ называется *вертикальной асимптотой* при x, стремящемся к x_0 слева (соотв. справа), если $\lim\limits_{x \nearrow x_0} f(x) = \infty$ (соотв. $\lim\limits_{x \searrow x_0} f(x) = \infty$).

М22◇9. Нарисуйте (с точным указанием всех асимптот) графики функций: **а)** $x + 1/x$;
б) $x^2 + 1/x$; **в)** $\dfrac{x+3}{2-x}$; **г)** $\dfrac{x^2 - 4x + 3}{x + 1}$; **д)** $\dfrac{(x+1)(x-2)(x+3)}{x^2 + 1}$; **е)** $\sqrt{x(1+x)}$.

М22◇10*. Нарисуйте траекторию точки, координаты которой зависят от времени $t \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ по закону: **а)** $x = t + 1/t$, $y = t^2 + 1/t$; **б)** $x = t^2/(t-1)$, $y = t/(t^2 - 1)$.

[1] асимптоты с $a = 0$ называются так же *горизонтальными*

Непрерывные функции

Определения. Пусть функция $X \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ определена на некотором множестве $X \subset \mathbb{R}$, и $x_0 \in X$ является предельной точкой этого множества. Функция f называется *непрерывной в точке* x_0, если $f(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, т. е. если $\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, \delta > 0 \;:\; \forall x \in X \quad |x - x_0| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Функция $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ называется *непрерывной* на данном множестве, если она определена и непрерывна в каждой точке этого множества.

М23◇1. Проверьте (с явным отысканием δ по ε в каждой точке), что функции $y = 5x^2$ и $y = \sqrt[3]{x}/2$ непрерывны во всех точках числовой прямой.

М23◇2. Верно ли, что f непрерывна в $x_0 \in X$ тогда и только тогда, когда для любой сходящейся к x_0 последовательности (a_n) выполнено равенство $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = f(\lim\limits_{n\to\infty} a_n)$?

М23◇3. Сформулируйте на ε - δ языке то, что функция f разрывна в точке x_0.

М23◇4. Существует ли функция $[0, 1] \xrightarrow{f} [0, 1]$ которая **а)** разрывна во всех точках; **б)** непрерывна в единственной точке $x_0 = 1/2$; **в)** то же, но монотонно неубывает; **г)** непрерывна во всех точках $1/k$ с $k \in \mathbb{N}$ и только в них;

М23◇5*. Существует ли функция непрерывная во всех иррациональных точках и разрывная во всех рациональных?

М23◇6. Пусть функция $X \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ непрерывна в $x_0 \in X$ и $f(x_0) \neq 0$. Всегда ли у точки x_0 есть такая ε-окрестность D, что функция $y = 1/f(x)$ определена всюду в $D \cap X$ и тоже непрерывна в точке x_0?

М23◇7 (инерция знака). Докажите, что в предыдущей задаче окрестность D можно подобрать так, чтобы функция $f(x)$ имела во всех точках $D \cap X$ тот же знак, что и $f(x_0)$.

М23◇8. Сформулируйте и докажите теоремы о непрерывности суммы, разности, произведения и частного двух непрерывных функций.

М23◇9. Функция $y = \big(f(x)\big)^2$ непрерывна на $[0, 1]$. Может ли при этом функция $y = f(x)$ быть разрывна: **а)** всюду; **б)** всюду кроме оной точки; **в)** ровно в одной точке?

М23◇10 (топологическое определение непрерывности). Докажите, что функция $U \xrightarrow{f} V$ между двумя открытыми множествами $U, V \subset \mathbb{R}$ всюду непрерывна тогда и только тогда, когда полный прообраз $f^{-1}(W) \stackrel{\text{def}}{=} \{u \in U \mid f(u) \in W\}$ любого открытого подмножества $W \subset V$ открыт.

М23◇11. Верно ли, что всюду непрерывная функция $U \xrightarrow{f} V$ между двумя открытыми множествами $U, V \subset \mathbb{R}$ переводит компактные подмножества $K \subset U$ в компактные?

М23◇12 (свойства непрерывных функций на отрезке). Пусть функция f определена и непрерывна во всех точках отрезка $[a, b]$. Верно ли, что множество значений $f([a, b])$: **а)** ограничено; **б)** содержит свои твг и тнг; **в)** является отрезком; **г)** $\forall\, \alpha, \beta \in [a, b]$ оно содержит все числа c, лежащие между $f(\alpha)$ и $f(\beta)$.

М23◇13. Докажите, что уравнение $f(x) = 0$, где f — любой многочлен нечётной степени с действительными коэффициентами, всегда имеет действительное решение.

М23◇14. Математический маятник представляет собой точечный груз массы m подвешенный в однородном вертикальном поле тяжести на конце невесомго абсолютно твёрдого отрезка, способного без трения вращаться в фиксированной вертикальной плоскости вокруг другого своего конца. Маятник без толчка отпускают из положения, составляющего с горизонталью угол α_0. Через 5 мин он оказался с горизонталью под углом α_1. Является ли α_1 непрерывной функцией от α_0 и можно ли подобрать α_0 так, чтобы $\alpha_1 = 60°$?

Геометрические эффекты и топологические патологии

М$23\frac{1}{2}$◇1 (волосоида). Нарисуйте график какой-нибудь ограниченной и непрерывной всюду, кроме нуля, функции $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, такой что ни один из односторонних пределов $\lim\limits_{x\searrow 0} f(x)$, $\lim\limits_{x\nearrow 0} f(x)$ не существует.

М$23\frac{1}{2}$◇2 (разрывы монотонных функций). Пусть функция f определена всюду на отрезке $[a,b]$ и монотонно неубывает на нём. Верно ли, что

а) $\forall\, c\in(a,b)$ существуют (и конечны) оба односторонних предела $\lim\limits_{x\searrow c} f(x)$ и $\lim\limits_{x\nearrow c} f(x)$;

б) множество точек разрыва функции f на $[a,b]$ не более, чем счётно?

М$23\frac{1}{2}$◇3 (непрерывность выпуклых функций). Функция f называется *выпуклой вверх* (соотв. *вниз*) на интервале I, если она определена всюду на I и для любого отрезка $[a,b]\subset I$ график f над интервалом (a,b) лежит строго выше (соотв. строго ниже) отрезка, соединяющего точку $(a,f(a))$ с точкой $(b,f(b))$. Верно ли, что выпуклость (в любую сторону) влечёт непрерывность?

О «редкости» и «малости». Подмножество $M\subset[a,b]$ называется *всюду плотным*, если любой интервал $I\subset[a,b]$ содержит бесконечно много точек из M. Подмножество $M\subset[a,b]$ называется *нигде не плотным*, если в любом интервале $I\subset[a,b]$ можно указать подинтервал $J\subset I$, не содержащий точек из M. Про подмножество $M\subset[a,b]$, которое можно покрыть не более чем счётной системой интервалов, суммарная длина которых сколь угодно мала, говорят, что оно имеет *меру нуль*.

М$23\frac{1}{2}$◇4. Имеет ли меру нуль множество: **а)** рациональных **б)** иррациональных чисел?

М$23\frac{1}{2}$◇5. Будет ли канторово множество **а)** нигде не плотным **б)** множеством меры нуль?

М$23\frac{1}{2}$◇6. Можно ли представить отрезок в виде объединения счётного набора его **а)** подмножеств меры нуль? **б)** нигде не плотных подмножеств?

М$23\frac{1}{2}$◇7. Можно ли представить множество иррациональных чисел на $[\,0\,,\,1\,]$ в виде объединения счётного набора замкнутых множеств?

М$23\frac{1}{2}$◇8. Докажите, что множество точек непрерывности произвольной функции является пересечением счётного набора открытых множеств.

М$23\frac{1}{2}$◇9. Существует ли функция, непрерывная во всех рациональных точках и разрывная во всех иррациональных?

М$23\frac{1}{2}$◇10. Существует ли непрерывная функция $[\,0\,,\,1\,]\xrightarrow{f}[\,0\,,\,1\,]$, график которой *всюду плотен*[1] в единичном квадрате?

М$23\frac{1}{2}$◇11* (канторова лесенка). Существует ли непрерывная монотонно неубывающая функция $[\,0\,,\,1\,]\xrightarrow{f}[\,0\,,\,1\,]$, которая сюрьективно отображает канторово множество на $[\,0\,,\,1\,]$?

М$23\frac{1}{2}$◇12* (кривая Пеано). Существует ли сюрьективное и *непрерывное*[2] отображение единичного отрезка $[\,0\,,\,1\,]\subset\mathbb{R}^1$ на единичный квадрат $[\,0\,,\,1\,]\times[\,0\,,\,1\,]\subset\mathbb{R}^2$?

М$23\frac{1}{2}$◇13*. Существует ли *непрерывная в обе стороны* биекция[3] между отрезком и квадратом?

М$23\frac{1}{2}$◇14* (универсальное замкнутое множество). Существует ли замкнутое подмножество единичного квадрата, среди сечений которого прямыми, параллельными оси OX, встречаются все замкнутые подмножества единичного отрезка?

---

[1] это означает, что любой непустой открытый квадратик пересекается с графиком

[2] отображение $[\,0\,,\,1\,]\xrightarrow{\varphi}[\,0\,,\,1\,]\times[\,0\,,\,1\,]$ непрерывно, если $\forall\, x_0\in[\,0\,,\,1\,]$, $\forall\,\varepsilon>0\;\;\exists\,\delta>0:|x-x_0|<\delta\Rightarrow|\varphi(x),\varphi(x_0)|<\varepsilon$.

[3] непрерывные в обе стороны биекции называются *гомеоморфизмами*

Длина окружности и площадь круга

(в этом листке запрещено использование тригонометрии)

M24◇1. У какого из выпуклых многоугольников $M_1 \subset M_2$ меньше площадь и периметр?

Терминология и обозначения. Разбиение $\boldsymbol{p}$ данной дуги $\boldsymbol{AB}$ на данной окружности с центром O — это набор точек $p = \{P_0, P_1, \dots, P_n\} \subset AB$, расположенных на дуге так, что $P_0 = A$, $P_n = B$, и при всех $i = 1, 2, \dots, (n-1)$ точка P_i лежит строго между P_{i-1} и P_{i+1}. Ломаная $P_0P_1P_2\dots P_n$ называется *вписанной ломаной* разбиения p, её длина обозначается через $\ell(p)$, а длина самой длиной её стороны — через $\lambda(p)$Аналогично, многоугольник $OP_0P_1P_2\dots P_n$ называется *вписанным многоугольником* разбиения p, а его площадь обозначается $S(p)$.

M24◇2. $\forall$ разбиений p_1, p_2 постройте разбиение p, содержащее как p_1, так и p_2, и докажите, что множества значений $\ell(p)$ и $S(p)$ при всевозможных p ограничены сверху.

Определения. $\ell(AB) \stackrel{\text{def}}{=} \sup\limits_p \ell(p)$ называется *линой дуги*, а $S(AOB) \stackrel{\text{def}}{=} \sup\limits_p S(p)$ — *площадью сектора*.

M24◇3°. Пусть $AC = AB \cup BC$, и $AB \cap BC = B$. Выразите $\ell(AC)$ и $S(AOC)$ через $\ell(AB)$, $\ell(BC)$, $S(AOB)$ и $S(BOC)$.

M24◇4°. Докажите, что отношение $\ell(AB)$ к радиусу и к длине полуокружности, а также отношение $S(AOB)$ к квадрату радиуса, зависят только от величины угла AOB, но не от радиуса окружности и положения дуги на ней.

M24◇5*. Покажите, что $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0$, такое что для всякого разбиения p с $\lambda(p) < \delta$ обе погрешности $|\ell(AB) - \ell(p)|$ и $|S(AOB) - S(p)|$ не превышают ε.

M24◇6. Выразите площадь сектора через длину дуги и радиус.

Радианная мера угла показывает, какую часть составляет этот угол от развёрнутого угла π. Точнее, длина полуокружности единичного радиуса обозначается через π, и если отношение длины дуги AB к длине полуокружности того же радиуса равно ϑ, то говорят, что дуга AB (и центральный угол AOB) составляют $\vartheta\pi$ радиан. Подчеркнём, что $\vartheta\pi \in \mathbb{R}$.

M24◇7 (архимедово вычисление числа π). Пусть p_n — это разбиение полуокружности радиуса 1 на 2^n равных дуг, и $\lambda_n \stackrel{\text{def}}{=} \lambda(p_n)$, $\ell_n \stackrel{\text{def}}{=} \ell(p_n)$, $S_n \stackrel{\text{def}}{=} S(p_n)$. Выразите λ_n, ℓ_n и S_n через λ_{n-1} и представьте λ_n как $\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{\cdots + \sqrt{2}}}}}$ (сколько тут радикалов?). Используя только четыре арифметических действия и извлечение квадратных корней[1], вычислите число π с точностью до 2-го знака после запятой.

Универсальное накрытие единичной окружности числовою прямою. Сопоставим каждому числу $t \in \mathbb{R}$ точку на единичной окружности $S^1 \stackrel{\text{def}}{=} \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$, получающуюся откладыванием от точки $(1,0)$ дуги длины $|t|$ по ЧС, если $t < 0$, и против ЧС, если $t > 0$. Иначе говоря, числовая прямая $\mathbb{R}^1$, ориентированная также, как ось OY, приставляется своим нулём $0 \in \mathbb{R}^1$ к точке $(1,0) \in S^1 \subset \mathbb{R}^2$ и затем наматывается на S^1, как нерастяжимая нитка на катушку. При этом числа $t \in \mathbb{R}$, отличающиеся на целое число оборотов (т. е. на целые кратные 2π), переходят в одну и ту же точку окружности. Набор чисел $t \in \mathbb{R}$, переходящих в данную точку $P \in S^1$, называется *аргументом* точки P (или *многозначным ориентированным углом* луча OP с осью OX); обозначение: $\mathrm{Arg}(P)$.

M24◇8. В какой четверти лежат точки с аргументами ${}^{57\pi}/_{4}$ и 2000 ?

M24◇9. Напишите формулу, описывающую все $t \in \mathbb{R}$, переходящие при универсальном накрытии в точки $(x,y) \in S^1$, у которых **а)** $x = {}^1/_2$; **б)** $y = -1$; **в)** $x = -{}^{\sqrt{2}}/_2$; **г)** $y = {}^1/_{\sqrt{3}}$; **д)** $y < 0$ и $x > 0$; **е)** $y \in \left[-{}^1/_2, {}^{\sqrt{2}}/_2\right]$; **ж)** $x \in \left[-{}^{\sqrt{3}}/_2, {}^1/_2\right]$; **з)** $x \in \left[-{}^{\sqrt{2}}/_2, {}^{\sqrt{3}}/_2\right]$ и $y \in \left[-{}^1/_2, {}^1/_2\right]$.

[1] можете, по немощи своей, использовать тут машинку, которой, однако, у Архимеда не было

Тригонометрия.

Тригонометрические функции. Пусть число $t\in\mathbb{R}$ переходит при универсальном накрытии $\mathbb{R} \twoheadrightarrow S^1$ в точку с координатами (x,y) на единичной окружности. Эти координаты обозначаются через $\cos t \overset{\text{def}}{=} x$ и $\sin t \overset{\text{def}}{=} y$ и называются *косинусом* и *синусом* числа $t\in\mathbb{R}$. Эти две функции, а также $\operatorname{tg} t \overset{\text{def}}{=} \sin t/\cos t$, $\operatorname{ctg} t \overset{\text{def}}{=} \cos t/\sin t$, $\sec t \overset{\text{def}}{=} 1/\cos t$ и $\operatorname{cosec} t \overset{\text{def}}{=} 1/\sin t$ обычно называт *тригонометрическими* функциями действительного числа t. Прямо из определений вытекают *основные тригонометрические тождества*: $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$, $\operatorname{tg}^2 t = \sec^2 t - 1$, $\operatorname{ctg}^2 t = \operatorname{cosec}^2 t - 1$.

М25◇1°. Найдите области определения и постройте графики всех тригонометрических функций, исследуйте их на периодичность и чётность.

М25◇2° (формулы приведения). Представьте в виде тригонометрической функции от аргумента t синус, косинус и тангенс от **а)** $-t$; **б)** $(\pm t \pm \pi)$; **в)** $(\pm t \pm \frac{\pi}{2})$.

М25◇3. Положительны или отрицательны числа $\sin(-10)$ и $\cos(100)$?

М25◇4. Найдите все $\vartheta\in\mathbb{R}$, для которых: **а)** $\cos\vartheta = 0$; **б)** $\sin\vartheta = -1$; **в)** $\sin\vartheta > \sqrt{2}/2$; **г)** $\sin\vartheta \leqslant 1/2$; **д)** $-\sqrt{3}/2 \leqslant \cos\vartheta < 1/2$; **е)** $|\operatorname{tg}\vartheta| < 1$; **ж)** $\sin\vartheta < \cos\vartheta$; **з)** $\operatorname{tg}\vartheta \geqslant \operatorname{ctg}\vartheta$.

М25◇5. При каком c прямая $ax + by = c$ касается единичной окружности? Найдите максимальное и минимальное значения функции $a\cos t + b\sin t$ с заданными $a, b \in \mathbb{R}$.

М25◇6. Всегда ли $|\sin\vartheta + \cos\vartheta| \leqslant \sqrt{2}$? При каких ϑ выполнено равенство?

Обратные тригонометрические функции: число $\vartheta \in [-\pi/2, \pi/2]$ называется *арксинусом* (соотв. *арктангенсом*) числа x, если $\sin\vartheta = x$ (соотв. $\operatorname{tg}\vartheta = x$); число $\vartheta \in [0,\pi]$, такое что $\cos\vartheta = x$, называется *арккосинусом* числа x. Обозначения: $\arcsin x$, $\operatorname{arctg} x$ и $\arccos x$.

М25◇7°. Для каждой из трёх обратных тригонометрических функций запомните множество значений, укажите область определения и постройте график. Найдите $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \operatorname{arctg} x$.

М25◇8°. Найдите: **а)** $\arcsin\cos 2000$; **б)** $\cos\operatorname{arctg} 2000$; **в)** $\cos\arcsin x$.

М25◇9 (сдвиг по фазе). Всякая ли линейная комбинация $a\cos t + b\sin t$ с фиксированными $a, b \in \mathbb{R}$ представляется в виде $\alpha\cos(t+\varphi)$ с подходящими *амплитудой* α и *фазой* φ?

М25◇10 (рациональная параметризация окружности). Пусть проекция единичной окружности из точки $(-1,0)$ на прямую $x=1$ переводит точку (x,y) в точку $(1,2t)$. Выразите x и y в виде рациональных функций от t и найдите пределы этих функций при $t\to\pm\infty$. Верно ли, что эти функции задают взаимно однозначное отображение между рациональными точками прямой $x=1$ и отличными от $(-1,0)$ точками единичной окружности, обе координаты которых рациональны?

М25◇11. Пользуясь зад. М25◇10, выразите $\sin x$, $\cos x$ и $\operatorname{tg} x$ через $\operatorname{tg}(x/2)$.

М25◇12 (пифагоровы тройки). Пользуясь зад. М25◇10, напишите функции $a(p,q)$, $b(p,q)$ и $c(p,q)$ при подстановке в которые произвольных целых чисел p, q будут получаться все возможные целые решения уравнения Пифагора $a^2 + b^2 = c^2$ и только они.

М25◇13. Какими неравенствами связаны x, $\sin x$ и $\operatorname{tg} x$ при $0 < x < \pi/2$?

М25◇14. Докажите, что все **а)** тригонометрические **б)** обратные тригонометрические функции[1] непрерывны всюду на своей области определения.

М25◇15. Вычислите: **а)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}$, **б)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{2x}$, **в)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x}{x}$, **г)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$; **д)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}$, **е)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg} 2x}{\sin 5x}$, **ж)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x\operatorname{arctg} x}{1-\cos x}$, **з)** $\lim\limits_{x\to\pi/2}\dfrac{\cos x}{x\sin(2x)}$.

[1] совет: начните с синуса

Комплексные числа

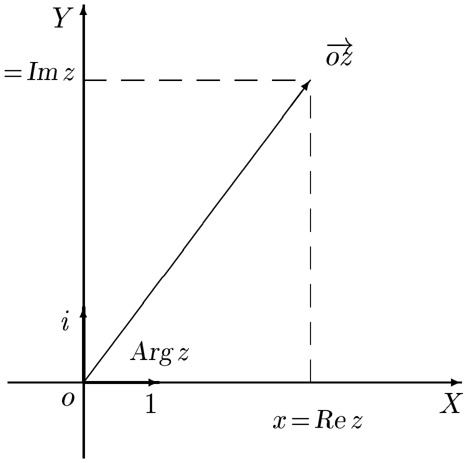


Рис. 26 - 1. Комплексное число.

Комплексное число — это точка z на плоскости $\mathbb{C}$ с фиксированной системой прямоугольных координат XoY, единичные базисные векторы которой обозначаются $\{\overrightarrow{1}, \overrightarrow{i}\}$ (см. рис. 26 - 1). С каждым $z \in \mathbb{C}$ свяжем пару координат (x, y) и радиус-вектор $\overrightarrow{oz} = x \cdot \overrightarrow{1} + y \cdot \overrightarrow{i}$, что обычно записывают просто как $z = x + iy$. Действительные числа $Re\,z \overset{\text{def}}{=} x$, $Im\,z \overset{\text{def}}{=} y$ и $|z| \overset{\text{def}}{=} \sqrt{x^2 + y^2}$ называются *вещественной частью*, *мнимой частью* и *модулем* комплексного числа z. Многозначный ориентированный угол[1] луча oz с осью oX называется *аргументом* z и обозначается $Arg\,z$. Комплексные числа можно *складывать* и *перемножать*. По определению, при сложении комплексных чисел их радиус-векторы складываюся (по правилу параллелограмма), а при умножении комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются (так что умножение на фиксированное комплексное число $a : \mathbb{C} \xrightarrow{z \mapsto az} \mathbb{C}$ есть *поворотная гомотетия* на угол $\mathrm{Arg}(a)$ с центром o и коэффициентом $|a|$).

М26◇1°. Найдите[2] **а)** i^2; **б)** i^3; **в)** $1/i - 1$; **г)** $(1+i)^5/(1-i)^3$; **д)** $\left(\frac{\sqrt{3}+i}{1-i}\right)^{30}$; **е)** $\left(\frac{i-\sqrt{3}}{i-1}\right)^{90}$; **ж)** все z с $z^4 = -1$; **з)** все z с $z^3 = -i$.

М26◇2° (сопряжение). $\overline{z} \overset{\text{def}}{=} x - iy$ называется *сопряжённым* к $z = x - iy$; проверьте, что сопряжение перестановочно со сложением и умножением и выразите $1/z$ через $\overline{z}$ и $|z|$.

М26◇3°. Проверьте, что комплексные числа составляют *поле*[3], в которое поле $\mathbb{R}$ с сохранением операций вкладывается в качестве числовой прямой (oX). Вычислите действительную и мнимую части чисел $1/z$, $z + w$ и zw, если $z = x_1 + iy_1$, $w = x_2 + iy_2$.

М26◇4. Найдите: **а°)** $(5+i)(7-6i)/(3+i)$; **б)** $(1+it)/(1-it)$ с $t \in \mathbb{R}$.

М26◇5°. Решите ур-я: **а)** $z^2 + (2i-7)z + (13-i) = 0$ **б)** $(z+i)^3 + (z-i)^3 = 0$ **в)** $\overline{z} = z^3$

М26◇6°. Пусть $z = \cos\alpha + i\,\sin\alpha$, $w = \cos\beta + i\,\sin\beta$. Вычислите геометрически и путём раскрытия скобок действительную и мнимую части чисел **а)** zw **б)** z^2 **в)** z^3 **г)** z^4 и получите отсюда тригонометрические формулы «сложения аргуметов» и «кратных углов».

М26◇7. Решите в $\mathbb{C}$ уравнение $z^5 = 1$ и вычислите $\cos\left(2\pi/5\right)$ и $\sin\left(2\pi/5\right)$ в радикалах.

М26◇8. Куда отображения **а)** $z \longmapsto z^2$ **б)** $z \longmapsto 1/z$ переводят декартову и полярную координатную сетки, окружность $|z + i| = 1$ и кошечку с рис. 17 - 2?

М26◇9. Вычислите суммы: **а)** $\sin x + \sin 2x + \cdots + \sin nx$ и $1 + \cos x + \cos 2x + \cdots + \cos nx$
б) $\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \cdots$ **в)** $\binom{n}{1} - \binom{n}{3} + \binom{n}{5} - \cdots$ **г)** $\binom{n}{0} + \binom{n}{4} + \binom{n}{8} + \cdots$
д) $2\sin x + 3\sin 2x + \cdots + n\sin(n-1)x$ и $1 + 2\cos x + 3\cos 2x + \cdots + n\cos(n-1)x$
е) $1 + 2\zeta + 3\zeta^2 + \cdots + n\zeta^{n-1}$, где $\zeta = \cos\left(2\pi/n\right) + i\,\sin\left(2\pi/n\right)$

М26◇10. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ вычислите сумму и произведение s-тых степеней всех комплексных корней уравнения $z^n = 1$ при $s = 1, 2, 3 \ldots$.

---

[1] напомним(см. **Лст. № 24**), что с точностью до любого целого числа оборотов он равен ориентированной длине дуги, которую надо пройти по единичной окружности от луча $[oX)$ до луча $[oz)$, т. е. $Arg\,z = \{\varphi + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\}$, где φ — это радианная мера ориентированного угла $\widehat{xoz}$, а k — любое целое число

[2] в этом листке «найдите z»означает «нарисуйте и вычислите $Re\,z$, $Im\,z$, $|z|$ и $Arg\,z$»

[3] т. е. что сложение и умножение подчиняются переместительному, сочетательному и распределительному законам, а уравнения $a + z = b$ и $cz = d$ при любых заданных a, b, d и $c \neq 0$ единственным образом разрешимы относительно z

Кольца и поля

(памятка грядущим Властелинам Колец и Царицам Полей)

Коммутативное кольцо с единицей — это множество с двумя операциями: *сложением* $(a,b) \longmapsto a+b$ и *умножением* $(a,b) \longmapsto a \cdot b = ab$, которые подчиняюся следующим трём наборам аксиом.

1) Аксиомы сложения

   а) коммутативность (переместительный закон): $a+b=b+a \quad \forall a,b$;

   б) ассоциативность (сочетательный закон): $a+(b+c)=(a+b)+c \quad \forall a,b,c$;

   в) существование нейтрального элемента (нуля): $\exists\, 0 \;:\; a+0=a \quad \forall a$;

   г) существование противоположного: $\forall\, a \quad \exists\,(-a) \;:\; a+(-a)=0$.

2) Аксиомы умножения

   а) коммутативность: $ab=ba \quad \forall a,b$

   б) ассоциативность: $a(bc)=(ab)c \quad \forall a,b,c$

   в) существование единицы: $\exists\, 1 \;:\; a\cdot 1=a \quad \forall a$

3) Аксиома дистрибутивности (распределительный закон): $a(b+c)=ab+ac \quad \forall a,b,c$

Поле — это коммутативное кольцо с единицей, в котором $\forall\; a \neq 0 \quad \exists a^{-1} \;:\; a\cdot a^{-1}=1$ (аксиома существования обратного) и $0 \neq 1$ (аксиома нетривиальности). Вторая аксиома запрещает называть полем *тривиальное кольцо* $K=\{0\}$, а первая говорит, что всякий ненулевой элемент поля *обратим*. В произвольном кольце допускаются необратимые элементы и даже *делители нуля* — элементы $a \neq 0$, такие что $ab=0$ для некоторого $b \neq 0$.

М$26\frac{1}{2}$◇1. Может ли делитель нуля или сам нуль быть обратим в каком-либо кольце?

Примеры полей: $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ (вычеты по *простому* модулю n).

Примеры колец: $\mathbb{Z}$; $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ (вычеты по модулю n); $C[0,1]$ (непрерывные функции на отрезке); $K[x]$ (многочлены с коэффициентами из любого коммутативного кольца K с единицей); $\mathbb{Q}[x]/f\mathbb{Q}[x]$ (вычеты по модулю $f \in \mathbb{Q}[x]$, называемые также *алгебраическими числами* вида $a_0\vartheta^m + a_1\vartheta^{m-1} + \cdots + a_{m-1}\vartheta + a_m$ с $f(\vartheta)=0$, $m < \deg f$, $a_i \in \mathbb{Q}$ и обозначаемое в таком контексте через $\mathbb{Q}[\vartheta]$ с $f(\vartheta)=0$; например, $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{\alpha+\beta\sqrt{2} \mid \alpha,\beta \in \mathbb{Q}\} = \mathbb{Q}[x]/(x^2-2)\mathbb{Q}[x]$ или $\mathbb{Q}[\sqrt[3]{5}] = \{\alpha+\beta\sqrt[3]{5}+\gamma\sqrt[3]{25} \mid \alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{Q}\} = \mathbb{Q}[x]/(x^3-5)\mathbb{Q}[x]$).

М$26\frac{1}{2}$◇2. Верно ли, что кольцо вычетов $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ является полем тогда и только тогда, когда n просто?

М$26\frac{1}{2}$◇3. Верно ли, что кольцо алгебраических чисел $\mathbb{Q}[\vartheta]$ с $f(\vartheta)=0$ является полем тогда и только тогда, когда f неприводим над $\mathbb{Q}$?

М$26\frac{1}{2}$◇4. Верно ли, что в любом поле: **а)** нуль единственен; **б)** единица единственна; **в)** $(-a)$ однозначно определяется по a; **г)** a^{-1} однозначно определяется по a; **д)** $a\cdot 0 = 0\ \forall a$; **е)** $(-1)\cdot a = (-a)\ \forall a$; **ж)** $ab=ac$ и $a\neq 0 \Rightarrow b=c$?

М$26\frac{1}{2}$◇5. Какие свойства из зад. М$26\frac{1}{2}$◇4 выполнены **а)** в любом коммутативном кольце с 1? **б)** в кольце без делителей нуля?

Вычитание и деление. В любом кольце есть *вычитание*: $(a,b) \longmapsto a-b \stackrel{\text{def}}{=} a+(-b)$, а если b обратим, то и *деление*: $(a,b) \longmapsto a/b \stackrel{\text{def}}{=} ab^{-1}$.

М$26\frac{1}{2}$◇6. Можно ли определить $a-b$ как единственный элемент, дающий a в сумме с b?

Многочлены.

Обозначения. Всюду в этом листке через k обозначается любое из *полей* $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, а через $k[x]$ — *кольцо* многочленов от переменной x с коэффициентами в поле k. Многочлен f называется *неприводимым*, если $f \neq gh$ с $\deg g, \deg h < \deg f$. Многочлен со старшим коэффициентом 1 называется *приведённым*. Если $f(x) = (x-\alpha)^m g(x)$ и $g(\alpha) \neq 0$, то α называется *m-кратным корнем* f.

М27◇1°. Может ли неприводимый многочлен из $\mathbb{Q}[x]$ быть приводимым в $\mathbb{R}[x]$ или $\mathbb{C}[x]$?

М27◇2°. Докажите, что для любых двух многочленов $f, g \in k[x]$ существуют единственные многочлены $q, r \in k[x]$, такие что $f = g \cdot q + r$ и либо $\deg r < \deg g$ либо $r = 0$.

М27◇3°. Докажите, что для любого набора многочленов $f_1, f_2, \ldots, f_n$ существует единственный приведённый многочлен $\text{НОД}(f_1, f_2, \ldots, f_n)$, который делит все f_i и делится на любой другой общий делитель всех f_i. Сформулируйте и докажите аналогичное о $\text{НОК}(f_1, f_2, \ldots, f_n)$, а также, что $\text{НОД}(f_1, f_2, \ldots, f_n) = g_1 f_1 + g_2 f_2 + \cdots + g_n f_n$ с подходящими $g_i \in k[x]$.

М27◇4°. Сформулируйте и докажите алгоритм Евклида для отыскания $\text{НОД}(f, g)$ и спробуйте его, представив $\text{НОД}(\,x^5 - 1\,, x^4 + x^2 + 1\,)$ в виде $f(x)(x^5-1) + g(x)(x^4+x^2+1)$.

М27◇5°. Пусть $\text{НОД}(f, g) = 1$. Верно ли, что f делит gh только когда f делит h, и что если h делится на f и на g, то h делится и на fg?

М27◇6. Найдите все $f \in \mathbb{Q}[x]$ с остатком $1+x$, $1+x^3$, $1+x^5$ от деления на $1+x^2$, $1+x^4$, $1+x^8$.

М27◇7. Найдите остаток от деления x^{2000} на: **а)** $(x-\alpha)$, где $\alpha \in k$ **б)** x^2+x+1 **в)** x^2+x-1

М27◇8. Пусть $f, g \in \mathbb{Q}[x]$ неприводимы и $\deg f \neq \deg g$. Могут ли они иметь общий корень в $\mathbb{C}$?

М27◇9. Могут ли два различных многочлена степеней, меньших n, принимать одинаковые значения в n точках? Сколько корней может быть у многочлена степени n?

М27◇10. Пусть числа $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in k$ попарно различны. Напишите многочлен $f(x)$ степени n с корнями $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, равный 1 при $x = \alpha_0$. Много ли таких многочленов?

М27◇11. Подставим в многочлен $f \in k[x]$ вместо x сумму $x+t$, раскроем все скобки и сгруппируем результат по степеням t следующим образом: $f(x+t) = f^{(0)}(x) + f^{(1)}(x) \cdot t + g(x,t) \cdot t^2$. Выразите коэффициенты $f^{(0)}(x)$ и $f^{(1)}(x)$ через коэффициенты $f(x)$.

Производная. Многочлен $f^{(1)}$ из зад. М27◇11 называется *производной* от f и по-другому обозначается $f'(x)$ или $\frac{d}{dx}f$. Положим, далее, $f^{(2)} = f'' \stackrel{\text{def}}{=} (f')' = \frac{d^2}{dx^2}f$, и вообще, $f^{(k)} \stackrel{\text{def}}{=} \left(f^{(k-1)}\right)' = \frac{d^k}{dx^k}f$.

М27◇12. Обозначим через $\Delta_f(t_1, t_2)$ тангенс угла наклона прямой, пересекающей график многочлена f в точках с абсциссами t_1 и t_2, выраженный в виде *многочлена* от t_1, t_2. Докажите, что такое выражение действительно имеется и что $\Delta_f(x,x) = f'(x)$.

М27◇13. Выразите через $f(x)$, $g(x)$, $f'(x)$ и $g'(x)$ производные: **а)** $(f \pm g)'$; **б)** $(\alpha g)'$, $\alpha \in k$; **в)** $(x^m f)'$; **г)** $(f \cdot g)'$; **д)** $\left(f/g\right)'$, если $f/g \in k[x]$; **е)** $(f^m)'$; **ж)** $(f(x^m))'$; **з)** $(f(g(x)))'$.

М27◇14 (правило Лейбница и формула Тейлора). Докажите тождества:

а) $(fg)^{(k)} = \sum\limits_{i=0}^{k} \binom{k}{i} f^{(i)} g^{(k-i)}$ **б)** $f(x+y) = \sum\limits_{m=0}^{\deg f} \frac{1}{m!} f^{(m)}(x)\, y^m$?

М27◇15. Будет ли m-кратный корень f корнем f', и если да, то какой кратности?

М27◇16. Найдите все (комплексные) кратные корни $x^7 + 7x^5 - 36x^4 + 15x^3 - 216x^2 + 9x - 324$.

М27◇17. Может ли неприводимый многочлен $f \in \mathbb{Q}[x]$ иметь кратный комплексный корень?

М27◇18 (формулы Виета). Каков коэффициент при x^k у $f(x) = a_0\,(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n)$?

М27◇19. Можно ли линейной заменой переменного в $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$ уничтожить **а)** член с x^{n-1} **б)** два члена с x^{n-1} и с x^{n-2}?

М27◇20 (дискриминант). В зад. М27◇18 число $D_f \stackrel{\text{def}}{=} a_0^{2n-2} \prod\limits_{i<j} (\alpha_i - \alpha_j)^2$ называется *дискриминантом* f. Выразите дискриминанты **а)** $x^2 + px + q$ **б*)** $x^3 + px + q$ через p и q.

Корни многочленов.

М$27\frac{1}{2}\diamond$1. Разложите x^8+128 в произведение вещественных квадратных трёхчленов.

М$27\frac{1}{2}\diamond$2. Пусть $z=x+iy\in\mathbb{C}$ является корнем $f\in\mathbb{R}[x]$. Будет ли $\overline{z}=x-iy$ корнем f?

М$27\frac{1}{2}\diamond$3. Верно ли, что у любого кубического многочлена $f\in\mathbb{R}[x]$ есть либо три вещественных (возможно, кратных) корня, либо ровно один вещественный и два невещественных комплексно сопряжённых корня. Как различить эти случаи глядя на D_f?

М$27\frac{1}{2}\diamond$4°. Пусть $\mathbb{F}$ — любое поле, $x^2-d\in\mathbb{F}[x]$ неприводим над $\mathbb{F}$, и $\mathbb{F}(d)=\{\alpha+\beta\sqrt{d}\mid\alpha,\beta\in\mathbb{F}\}$ — *квадратичное расширение* поля $\mathbb{F}$, как в листке $17\frac{2}{3}$. Будет ли $\mathbb{F}(d)$ полем?

М$27\frac{1}{2}\diamond$5. Пусть в зад. М$27\frac{1}{2}\diamond$4 некий кубический $f\in\mathbb{F}[x]$ имеет в $\mathbb{F}(d)$ корень $a+b\sqrt{d}$. Верно ли, что: **а)** $a-b\sqrt{d}$ тоже корень f; **б)** f приводим над $\mathbb{F}$; **в)** у f есть корень в $\mathbb{F}$?

М$27\frac{1}{2}\diamond$6. Докажите, что кубический многочлен с целыми коэффициентами, который имеет корень, выражающийся через 1 конечным числом сложений, умножений, вычитаний, делений и извлечений квадратных корней, имеет и рациональный корень.

М$27\frac{1}{2}\diamond$7*. Есть ли угол, не разбивающийся циркулем и линейкой на три равных части?

М$27\frac{1}{2}\diamond$8*. Можно ли циркулем и линейкой построить правильный семиугольник?

М$27\frac{1}{2}\diamond$9 (решение кубического уравнения в тригонометрических функциях). Пользуясь формулой для косинуса тройного угла, выразите корни многочлена $4x^3-3x-a$ с $a\in\mathbb{R}$ и $|a|\leqslant 1$ через тригонометрические функции. При каких условиях на дискриминант и коэффициенты многочлен x^3+px+q можно подходящей заменой $x\mapsto\alpha x$ сделать пропорциональным многочлену $4x^3-3x-a$ с $a\in\mathbb{R}$ и $|a|\leqslant 1$?

М$27\frac{1}{2}\diamond$10. Решите уравнения: **а)** $x^3-3x+1=0$, **б*)** $x^3+x^2-2x-1=0$.

М$27\frac{1}{2}\diamond$11 (решение кубического уравнения методом Кардано). Придумайте квадратное уравнение, корни z_1, z_2 которого таковы, что $\sqrt[3]{z_1}+\sqrt[3]{z_2}$ является корнем кубического трёхчлена $f(x)=x^3+px+q$. Какой знак должен быть у D_f, чтобы числа z_1, z_2 оказались:
а) вещественны и различны? **б)** комплексно сопряжены?

М$27\frac{1}{2}\diamond$12. Найдите вещественные корни многочленов: **а)** x^3-x+1; **б*)** x^3+2x^2+x+1.

М$27\frac{1}{2}\diamond$13. Вычислите в радикалах: **а)** $\cos(\pi/9)$, **б)** $\cos(\pi/12)$, **в*)** $\cos(\pi/7)$.

Топология поля $\mathbb{C}$. Под ε-окрестностью числа $z_0\in\mathbb{C}$ мы понимаем $D_e(z_0)\overset{\text{def}}{=}\{z\in\mathbb{C}\mid |z-z_0|<\varepsilon\}$, т. е. открытый круг радиуса ε с центром в z_0. Пределы комплексных последовательностей и функций, непрерывность функций $\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ и $\mathbb{C}\to\mathbb{R}$, предельные и изолированные точки комплексных множеств, открытые и замкнутые подмножества в $\mathbb{C}$ и т. п. определяются дословно так же, как в $\mathbb{R}$.

М$27\frac{1}{2}\diamond$14°. Сформулируйте и докажите теоремы о пределе суммы и произведения двух сходящихся комплексных последовательностей. Верно ли, что $z_n=x_n+iy_n\to z_0=x_0+iy_0$ в $\mathbb{C}$ тогда и только тогда, когда $x_n\to x_0$ и $y_n\to y_0$ в $\mathbb{R}$?

М$27\frac{1}{2}\diamond$15. Пусть $f\in\mathbb{C}[x]$ — произвольный многочлен, отличный от константы. Верно ли, что:
а) $\forall$ замкнутого круга $D\subset\mathbb{C}$ $\exists\, z_1,z_2\in D: |f(z_1)|=\inf_D|f(z)|$ и $|f(z_2)|=\sup_D|f(z)|$;
б) $|f(z)|\to\infty$ при $z\to\infty$; **в)** $\exists\, z_0\in\mathbb{C}: |f(z_0)|=\inf_{\mathbb{C}}|f(z)|$?

М$27\frac{1}{2}\diamond$16 (лемма Даламбера). Для любого $f\in\mathbb{C}[x]$, такого что $f(z_0)\neq 0$, найдите вблизи z_0 точку z, где $|f(z)|<|f(z_0)|$ (подсказка: запишите $f(x)$ по возрастанию степеней $(x-z_0)$ как $f(x)=f(z_0)+a_m(x-z_0)^m+a_{m+1}(x-z_0)^{m+1}+\cdots$, где m — младшая из степеней с $a_m\neq 0$, возьмите $\vartheta\in\mathbb{C}$ так, чтобы $a_m\vartheta^m=-f(z_0)$, и ищите z в виде $z_0+t\vartheta$ с $t\in\mathbb{R}$).

М$27\frac{1}{2}\diamond$17* (алгебраическая замкнутость поля $\mathbb{C}$). Докажите, что любой многочлен степени n из $\mathbb{C}[x]$ имеет (с учётом кратностей) ровно n комплексных корней.

М$27\frac{1}{2}\diamond$18. Опишите все неприводимые многочлены в $\mathbb{C}[x]$ и в $\mathbb{R}[x]$.

Формальные степенные ряды

Определения. Бесконечное выражение $a(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + \cdots$, где a_i — числа из некоторого поля $\mathbb{F}$ (у нас $\mathbb{F} = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$), а t — переменная, называется *формальным степенным рядом*. По определению, два ряда *равны*, если равны все их соответственные коэффициенты. Совокупность всех формальных степенных рядов с коэффициентами из $\mathbb{F}$ обозначается $\mathbb{F}[[t]]$. Многочлен — это ряд с конечным числом ненулевых коэффициентов, так что $\mathbb{F}[t] \subset \mathbb{F}[[t]]$. Сопоставление рядам $f_1, f_2, \ldots, f_n$ нового ряда g называется *формальной алгебраической операцией*, если каждый коэффициент g вычисляется конечным числом арифметических действий над конечным числом коэффициентов рядов $f_1, f_2, \ldots, f_n$. Сложение и умножение рядов *являются* формальными операциями, а «вычисление значения ряда при данном числовом значении t» — *нет* (и потому *не определено*).

M28⋄1°. Напишите явное выражение для коэффициента при t^n у суммы и у произведения двух рядов через коэффициенты самих этих рядов.

M28⋄2°. Для любого конечного множества M положим $C_M(t) \stackrel{\text{def}}{=} \sum\limits_{k\geqslant 0} c_kt^k$, где c_k — это число всех k-элементных подмножеств в M. Для двух непересекающихся конечных множеств A и B выразите $C_{A\cup B}(t)$ и[1] $C_{A\times B}(t)$ через $C_A(t)$ и $C_B(t)$

M28⋄3 (деление). Ряд $a(t)$ называется *обратимым*, если существует ряд $a^{-1}(t)$, такой что $a(t)a^{-1}(t) = 1$. Докажите, что $a(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + \cdots$ обратим тогда и только тогда, когда $a_0 \neq 0$, причём $a^{-1}(t)$ единственен, и его отыскание есть формальная операция.

M28⋄4. Найдите n-тый коэффициент ряда: **а)** $(1-t)^{-1}$ **б)** $\big((1-t)^2\big)^{-1}$ **в)** $\big((1-t)^m\big)^{-1}$ **г)** $\big((t-1)(t+2)(t-3)\big)^{-1}$ **д)** $\big((t+1)^2(t-2)(t+3)^3\big)^{-1}$ **е)** $\big(t^2+t-1\big)^{-1}$ **ж)** $\big(t^2+t+1\big)^{-1}$.

M28⋄5° (замена переменного). Является ли формальной алгебраической операцией подстановка вместо t произвольного ряда с нулевым свободным членом?

M28⋄6. Подставим $t+\vartheta$ вместо t в ряд $f(t) \in k[[t]]$, сгруппируем результат по степеням ϑ и запишем его в виде $f(t+\vartheta) = \sum\limits_{k\geqslant 0} \dfrac{1}{k!} f^{(k)}(t)\cdot \vartheta^k$. Выразите коэффициенты каждого из рядов $f^{(k)}(t)$ через коэффициенты исходного ряда $f(t)$.

Производная. Ряд $f^{(1)}(t)$ из зад. M28⋄6 называется *производной* f и иначе обозначается f' или $\dfrac{d}{dt}f$.

M28⋄7. Согласуются ли определения производной для рядов и многочленов, и верно ли, что в зад. M28⋄6 $f^{(k)} = \left(f^{(k-1)}\right)' = \dfrac{d^k}{dt^k}f$?

M28⋄8. Докажите, что для любого ряда $f(t) \in k[[t]]$ ряд $f(t_1) - f(t_2) \in k[[t_1,t_2]]$ делится в $k[[t_1,t_2]]$ на (t_1-t_2), и при подстановке в частное $t_1 = t_2 = t$ получится ряд $f'(t)$.

M28⋄9. Пусть $f(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + \cdots$ и $g(t) = b_0 + b_1t + b_2t^2 + \cdots$. Выразите через f, g, f' и g' производные: **а)** $(f\pm g)'$ **б)** $\big(\alpha f(t)\big)'$, где $\alpha = \text{const}$ **в)** $\big(t^m f(t)\big)'$ **г)** $(f\cdot g)'$ **д)** $\left(\dfrac{f}{g}\right)'$, при $b_0 \neq 0$ **е)** $\big(f(\alpha t)\big)'$, где $\alpha = \text{const}$ **ж)** $\big(f\left(t^m\right)\big)'$ **з)** $\Big(f\big(g(t)\big)\Big)'$, при $b_0 = 0$.

M28⋄10. Вычислите m-тую производную от $(1-t)^{-1}$ и сопоставьте это с зад. M28⋄4.

M28⋄11. Разложите в формальный степенной ряд $(1-t)^{-m}$ с произвольным $m \in \mathbb{N}$.

M28⋄12. Сформулируйте и докажите для рядов правило Лейбница и формулу Тейлора из зад. M27⋄14?

[1] *произведение* $A\times B$ множеств A и B представляет собой множество всех пар (a,b) с $a\in A$, $b\in B$

Формальные экспонента, логарифм и бином

M$28\frac{1}{2}\diamond$1° (первообразные). Убедитесь, что для любого ряда $f \in k[[t]]$ существует единственный ряд $g \in k[[t]]$ с *нулевым* свободным членом, такой что $g' = f$ (g называют *первообразным* для f и пишут $g \overset{\text{def}}{=} \int f\,dt$). Выразите коэффициенты g через коэффициенты f. Докажите, что: **а)** $\int (f \pm g)\,dt = \int f\,dt \pm \int g\,dt$; **б)** $\int \lambda f(t)\,dt = \lambda \int f(t)\,dt$, где $\lambda = \text{const}$; **в)** $\int f'g\,dt = fg - f_0g_0 - \int fg'\,dt$, где $f_0, g_0 \in k$ суть свободные члены рядов f и g.

M$28\frac{1}{2}\diamond$2° (логарифм). Ряд $\ln(1+t) \overset{\text{def}}{=} \int \frac{dt}{1+t}$ называется *логарифмом* $(1+t)$. Вычислите явно все его коэффициенты. Убедитесь, что формальный ряд $\ln\bigl(f(t)\bigr)$ определен для любого формального ряда $f(t)$ с единичным свободным членом. Выразите $\bigl(\ln(f)\bigr)'$ через f и f'.

M$28\frac{1}{2}\diamond$3. Пусть f и g — произвольные ряды с единичным свободным членом. Какие из перечисленных ниже равенств равносильны друг другу:
а) $f = g$ **б)** $f' = g'$ **в)** $f'/f = g'/g$ **г)** $(\ln f)' = (\ln g)'$ **д)** $\ln f = \ln g$

M$28\frac{1}{2}\diamond$4. Является ли *логарифмическая производная* $f \longmapsto \bigl(\ln(f)\bigr)'$ биекцией между множеством $N \subset k[[t]]$ рядов с единичным свободным членом и множеством $k[[t]]$ всех рядов?

M$28\frac{1}{2}\diamond$5° (экспонента). Сколько существует рядов $\exp(t)$ с единичным свободным членом, таких что $\exp'(t) = \exp(t)$? Найдите все коэффициенты такого ряда и вычислите $\ln(\exp(t))$.

M$28\frac{1}{2}\diamond$6°. Убедитесь, что $\exp(h(t))$ определена для любого ряда $h(t)$ с нулевым свободным членом и вычислите $\exp(\ln(1+t))$.

M$28\frac{1}{2}\diamond$7. Докажите, что экспоненцирование $N \xrightarrow{\exp} U$ и логарифмирование $U \xrightarrow{\ln} N$ суть взаимно обратные биекции между множеством $N \subset k[[t]]$ рядов с нулевым свободным членом и множеством $U \subset k[[t]]$ рядов с единичным свободным членом, причем сложение рядов в N и умножение рядов в U переводятся экспоненцированием и логарифмированием друг в друга, т. е. $\exp(h_1 + h_2) = \exp(h_1)\exp(h_2)$ и $\ln(f_1 f_2) = \ln(f_1) + \ln(f_2)$ $\forall\, h_1, h_2 \in N$ и $\forall\, f_1, f_2 \in U$.

M$28\frac{1}{2}\diamond$8 (бином Ньютона). Для любого $\alpha \in k$ ряд $(1+t)^\alpha \overset{\text{def}}{=} \exp\bigl(\alpha \ln(1+t)\bigr)$ называется *биномом* с показателем α. Вычислите коэффициенты бинома явно. Разверните в формальные степенные ряды $\sqrt[3]{1+2t}$ и $1/\sqrt{1-3t}$.

M$28\frac{1}{2}\diamond$9. Убедитесь, что ряд f^α определен для любых $f \in U$, $\alpha \in k$ и лежит в U. Верно ли, что $f^{\alpha_1} f^{\alpha_2} = f^{\alpha_1+\alpha_2}$ и $(f^{\alpha_1})^{\alpha_2} = f^{\alpha_1\alpha_2}$? Является ли ряд f^{-1} обратным к ряду f?

M$28\frac{1}{2}\diamond$10. Выразите $(f^\alpha)'$ через α, f и f'.

M$28\frac{1}{2}\diamond$11* (числа Каталана). При практическом вычислении суммы $a_1 \overbrace{+ \cdots +}^{n\text{ плюсов}} a_{n+1}$ из $(n+1)$ слагаемых, в ней реально всегда расставляются скобки так, чтобы точно зафиксировать последовательность выполняемых сложений (по одному в каждый момент времени). Количество всевозможных таких расстановок называется n-тым *числом Каталана* c_n. По определению, $c_0 = 1$. Напишите реккурентную формулу, выражающую c_n через $c_0, c_1, \dots, c_{n-1}$, проинтерпретируйте её как квадратное уравнение на ряд $c(t) = \sum c_\nu t^\nu$, решите его (в $\mathbb{Q}[[t]]$) и получите явное выражение чисел Каталана через подходящие числа сочетаний.

M$28\frac{1}{2}\diamond$12*. Сколькими способами можно разрезать выпуклый n-угольник на треугольники по непересекающимся нигде кроме вершин диагоналям?

M$28\frac{1}{2}\diamond$13. Всегда ли C_{2n}^n делится на $(n+1)$?

Производящие функции

Метод производящих функций для изучения последовательности $(a_n) \subset k$ сопоставляет ей *производящую функцию* $A(t) = \sum a_n t^n \in k[[t]]$, переформулирует свойства последовательности в виде *функциональных* (алгебраических, дифференциальных, …) соотношений на $A(t)$ и использует для их изучения исчисление формальных степенных рядов.

Реккурентное уравнение k-того порядка — это соотношение $y_n = a_1 y_{n-1} + \cdots + a_k y_{n-k}$, в котором $a_1, a_2, \ldots, a_k$ — заданные числа (причём $a_k \neq 0$), а (y_n) — неизвестная последовательность. Любой набор из k чисел $c_0, c_1, \ldots, c_{k-1}$ однозначно продолжается до удовлетворяющей уравнению последовательности (y_n) с начальными значениями $y_\nu = c_\nu$ при $\nu = 0, \ldots, (k-1)$.

М$28\frac{2}{3}$◇1. Положим $Y(t) = \sum\limits_{\nu \geqslant 0} y_\nu t^\nu \in \mathbb{C}[[t]]$, $A(t) = 1 - a_1 t - \cdots - a_k t^{n-k} \in \mathbb{C}[t]$, $B(t) = Y(t)A(t)$. Выясните, является ли ряд $B(t)$ многочленом и выразите его коэффициенты через a_ν и c_ν.

М$28\frac{2}{3}$◇2. Пользуясь предыдущей задачей, найдите $Y(t)$ и «формулу n-того члена» для последовательностей: **а)** $y_n = y_{n-1} + y_{n-2}$ с $y_0 = 0$, $y_1 = 1$; **б)** $y_n = 4\,(y_{n-1} - y_{n-2})$ с $y_0 = 3$, $y_1 = 1$.

М$28\frac{2}{3}$◇3*. Пусть $x^k - a_1 x^{k-1} - \cdots - a_{k-1}x - a_k = (x-\lambda_1)^{m_1} \cdots (x-\lambda_N)^{m_s}$, где все $\lambda_j \in \mathbb{C}$ попарно различны. Докажите, что $y_n = \sum\limits_{j=1}^{N} \sum\limits_{i=0}^{m_j} \gamma_{ij} f_{ij}(n)$, где функции $f_{ij}(n) \overset{\text{def}}{=} \binom{n}{i}\lambda_j^n$, а $\gamma_{ij} \in \mathbb{C}$ — некоторые константы, однозначно определяемые k начальными значениями последовательности.

Число разбиений $p(n)$ — это число всевозможных представлений n в виде суммы ненулевых неупорядоченных слагаемых, т. е. число всех n-клеточных диаграмм Юнга.

М$28\frac{2}{3}$◇4. Вычислите $p(n)$ для $n \leqslant 10$.

М$28\frac{2}{3}$◇5. Убедитесь, что в $\mathbb{Q}[[t]]$ корректно определено бесконечное произведение геометрических прогрессий $P(t) \overset{\text{def}}{=} \prod\limits_{k \geqslant 1} (1-t^k)^{-1}$ и выразите коэффициенты $P(t)$ через числа разбиений.

М$28\frac{2}{3}$◇6. Докажите, что $1/P(t) = \prod\limits_{k \geqslant 1}(1-t^k) = 1 + \sum\limits_{n \geqslant 1} (\widehat{p}_{\text{ч}}(n) - \widehat{p}_{\text{н}}(n)) \cdot t^n$, где $\widehat{p}_{\text{ч}}(n)$ и $\widehat{p}_{\text{н}}(n)$ суть количества n-клеточных диаграмм Юнга, которых длины всех строк различны, а общее число строк чётным и, соответственно, нечётно.

М$28\frac{2}{3}$◇7. Рассмотрим множество $\widehat{Y}_n$ всех n-клеточных диаграмм Юнга, строки которых имеют попарно разную длину. Будем называть *торцом* такой диаграммы её правую верхнюю клетку и все клетки, идущие от неё под углом 45° по диагонали влево вниз. Попробуем задать на $\widehat{Y}_n$ отображение, которое, в зависимости от того, что у диаграммы длинее — торец или нижняя строка, либо отрезает её торец и пририсовывет его новой нижней строкой, либо, наоборот, отрезает нижнюю строку и пририсовывет её новым торцом. Выясните, для каких диаграмм это отображение не определено, и при каких n оно устраивает в $\widehat{Y}_n$ биекцию между диаграммами из чётного и из нечётного числа строк (а с нею — равенство $\widehat{p}_{\text{ч}}(n) = \widehat{p}_{\text{н}}(n)$).

М$28\frac{2}{3}$◇8 (пентагональная теорема Эйлера). $1/P(t) = 1 + \sum\limits_{k \geqslant 1} (-1)^k \left(t^{\left(3k^2-k\right)/2} + t^{\left(3k^2+k\right)/2}\right)$ и $p(n) = p(n-1) + p(n-2) - p(n-5) - p(n-7) + p(n-12) + p(n-15) - \cdots$ (докажите).

М$28\frac{2}{3}$◇9. Является ли $P_m(t) \overset{\text{def}}{=} \sum\limits_{n \geqslant 0} p_m(n) \cdot t^n$, где $p_m(n)$ — это число n-клеточных диаграмм Юнга из $\leqslant m$ строк, рациональной функцией от t? Выразите $p_m(n)$ через $p_{m-1}(n)$ и $p_m(n-m)$.

М$28\frac{2}{3}$◇10 (гауссовы биномиальные коэффициенты). Пусть $F_n(t) = (1-t)(1-t^2)\cdots(1-t^n)$. Является ли $G_n^k(t) \overset{\text{def}}{=} F_n(t)/\left(F_k(t) \cdot F_{n-k}(t)\right)$ многочленом? Вычислите $\lim\limits_{t \to 0} G_n^k(t)$.

М$28\frac{2}{3}$◇11. Выразите через гауссовы биномиальные коэффициенты производящую функцию $P_m^k(t) = \sum\limits_{n \geqslant 0} p_m^k(n) \cdot t^n$ чисел $p_m^k(n)$ n-клеточных диаграмм Юнга высоты $\leqslant m$ и ширины $\leqslant k$.

Действие $\mathbb{Q}[[d/dx]]$ на $\mathbb{Q}[x]$.

Разностные операторы на кольце многочленов. Для любого формального ряда $F(t) = \sum a_k t^k \in \mathbb{Q}[[t]]$ определим отображение $\widetilde{F} \overset{\text{def}}{=} F(d/dx) : \mathbb{Q}[x] \longrightarrow \mathbb{Q}[x]$, которое сопоставляет многочлену $g \in \mathbb{Q}[x]$ многочлен $\widetilde{F}g \overset{\text{def}}{=} \sum a_k (d/dx)^k g$, где $(d/dx)^k g = g^{(k)}$ — это k-я производная от g. Поскольку $\forall\, g \in \mathbb{Q}[x]\ \exists\, n \in \mathbb{N} : g^{(n)} = 0$, сумма справа конечна $\forall g$, и $\widetilde{F}g$ действительно является многочленом. Отображения такого вида называются *разностными операторами* на кольце многочленов.

М$28\frac{3}{4}\diamond1^\circ$ (аппелевы многочлены). Проверьте, что разностные операторы *линейны*, т. е. что $\widetilde{F}(\lambda f + \mu g) = \lambda\widetilde{F}g + \mu\widetilde{F}f\ \forall\, f, g \in \mathbb{Q}[x]$ и $\forall\, \lambda, \mu \in \mathbb{Q}$, и что действие $\widetilde{F}$ вполне определяется заданием последовательности многочленов $F_n(x) \overset{\text{def}}{=} \widetilde{F}x^n$. Выразите коэффициенты $F_n(x)$ через коэффициеты $F(t)$ и, наоборот, восстановите F по F_n.

М$28\frac{3}{4}\diamond2^\circ$. Пусть $F(t)G(t) = 1$ в $\mathbb{Q}[[t]]$. Что можно сказать про отображения $\widetilde{F}$ и $\widetilde{G}$?

М$28\frac{3}{4}\diamond3$ (формула Тейлора). Как действуют на $\mathbb{Q}[x]$ операторы $\exp(d/dt)$ и $\exp(-d/dt)$?

М$28\frac{3}{4}\diamond4$. Являются ли отображения $f(x) \overset{\nabla}{\longmapsto} f(x) - f(x-1)$ и $f(x) \overset{\Delta}{\longmapsto} f(x+1) - f(x)$ разностными операторами, и если да, то каким рядам они отвечают?

М$28\frac{3}{4}\diamond5$. Постройте последовательность многочленов $c_n(x)$, в которой $c_0(x) = 1$, при $n \geqslant 1$ все $c_n(x)$ не имеют свободного члена и удовлетворяют соотношению $\nabla c_n = c_{n-1}$.

М$28\frac{3}{4}\diamond6$ (целозначные многочлены). Многочлен $f(x)$ с рациональными коэффициентами называется *целозначным*, если значение $f(z) \in \mathbb{Z}\ \forall\, z \in \mathbb{Z}$. Бывают ли целозначные многочлены с нецелыми коэффициентами? Укажите какой-нибудь набор из $(n+1)$ целозначных многочленов $f_0, f_1, \ldots, f_n$, такой что любой целозначный многочлен f степени $\leqslant n$ единственным образом записывается в виде $f = m_0 f_0 + m_1 f_1 + \cdots + m_n f_n$ с $m_i \in \mathbb{Z}$. Существуют ли такие наборы с $\deg f_i = i\ \forall i$ и с $\deg f_i = n\ \forall i$?

М$28\frac{3}{4}\diamond7^*$. Проверьте, что операторы Δ и ∇ из зад. М$28\frac{3}{4}\diamond4$ строго понижают степени многочленов, и потому для каждого ряда $F \in \mathbb{Q}[[t]]$ определены отображения $F^\Delta \overset{\text{def}}{=} F(\Delta) : \mathbb{Q}[x] \longrightarrow \mathbb{Q}[x]$ и $F^\nabla \overset{\text{def}}{=} F(\nabla) : \mathbb{Q}[x] \longrightarrow \mathbb{Q}[x]$. Докажите, что множества операторов $\mathbb{Q}[[\Delta]]$, $\mathbb{Q}[[\nabla]]$ и $\mathbb{Q}[[d/dx]]$ совпадают. Разверните d/dx в формальные степенные ряды от Δ и от ∇.

М$28\frac{3}{4}\diamond8$ (суммирование степеней). Пусть многочлен $s_m(x)$ таков, что $1^m + 2^m + \cdots + (n-1)^m = s_m(n)\ \forall\, n \in \mathbb{N}$. Вычислите $\Delta s_m(x)$ и найдите в $\mathbb{Q}[[t]]$ функцию, для которой $s'_m(x)$ является аппелевым многочленом (см. зад. М$28\frac{3}{4}\diamond1$).

Ряд Тодда и числа и многочлены Бернулли. $B(t) \overset{\text{def}}{=} \dfrac{t}{\exp(t) - 1} = \sum\limits_{k \geqslant 0} \dfrac{b_k}{k!} t^k$ называется *рядом Тодда*.

Входящие в его коэффициенты числа b_k называются *числами Бернулли*, а его аппелевы многочлены $B_n(x) = \widetilde{B}x^n$ называются *многочленами Бернулли*.

М$28\frac{3}{4}\diamond9$. Выразите **а)** b_n через $b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}$ **б)** B_n через $B_0, B_1, \ldots, B_{n-1}$

М$28\frac{3}{4}\diamond10$. Выразите коэффициенты многочлена $s_m(x)$ из зад. М$28\frac{3}{4}\diamond8$ через числа Бернулли.

М$28\frac{3}{4}\diamond11$. Найдите «нечётную составляющую» $B(t) - B(-t)$ и все числа b_{2k+1}.

М$28\frac{3}{4}\diamond12$. Вычислите первые 11 чисел и многочленов Бернулли и сумму 10-х степеней первых 1000 натуральных чисел[1].

[1] у Якоба Бернулли, по его собственному признанию, на это ушло «меньше половины четверти часа»

Производная и дифференциал.

Определения и обозначения. Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой ε-окрестности точки x_0. Функция f называется *дифференцируемой* в точке x_0, если $f(x) = f(x_0) + \alpha \cdot (x - x_0) + o(x - x_0)$, где α — некоторая константа, а функция $o(t)$ такова, что $\lim\limits_{t\to 0} o(t)/t = 0$. Говоря неформально, дифференцируемость означает, что с точностью до «бесконечно малой» по сравнению с $(x - x_0)$ функции $o(x - x_0)$ разность $f(x) - f(x_0)$ ведет себя как *линейная однородная функция* $\alpha \cdot (x - x_0)$ от $(x - x_0)$. Коэффициент α называется *производной* функции f в точке x_0 и обозначается $f'(x_0)$, а линейная однородная функция $\alpha\,(x - x_0)$ от $(x - x_0)$ называется *дифференциалом* функции f в точке x_0 и обозначается $df(x_0)$. Например, функция $y = x$ дифференцируема в каждой точке $x_0 \in \mathbb{R}$, её производная $x' \equiv 1$, а дифференциал $dx(x_0) = (x - x_0)$ в каждой точке x_0. Поэтому, допуская известную вольность, производную произвольной дифференцируемой функции $f(x)$ часто помимо f' обозначают через $\dfrac{df}{dx}$.

М29◇1°. Докажите, что для дифференцируемости в точке x_0 функции $f(x)$, определённой в некоторой её окрестности, необходимо и достаточно существование конечного предела

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{t\to 0}\frac{f(x_0+t)-f(x_0)}{t}\ ,$$

причём этот предел, буде он существует, равен $f'(x_0)$.

М29◇2°. Прямая называется *касательной* к графику функции $y = f(x)$ в точке $A = (x_0, f(x_0))$, если она является пределом какой-либо последовательности проходящих через A секущих прямых (A, B_n), где $B_n = (x_n, f(x_n))$ и $x_n \to x_0$. Докажите, что если f дифференцируема в x_0, то касательная существует и единственна. Напишите для неё явное уравнение.

М29◇3. На рис. 17 - 1 был изображён график функции $y = f(x)$. Нарисуйте график функции:
а) $y = f'(x)$, **б)** $y = F(x)$, такой что $F(0) = 0$ и $F'(x) = f(x)\ \forall x$.

М29◇4°. Всякая ли дифференцируемая в точке x_0 функция непрерывна в точке x_0?

М29◇5°. Всякая ли непрерывная в точке x_0 функция, определённая в некоторой её окрестности, дифференцируема в x_0?

М29◇6. Пусть $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в точке x_0. Дифференцируемы ли в x_0 функции:
а) $f(x) \pm g(x)$, **б)** $\lambda f(x)$, где $\lambda = \mathrm{const}$, **в)** $f(x)g(x)$; **г)** $f(x)/g(x)$, где $g(x_0) \neq 0$.
Если да, то выразите их производные в x_0 через $f(x_0)$, $g(x_0)$, $f'(x_0)$ и $g'(x_0)$.

М29◇7. Пусть $h(x) = f(g(x))$, причём $g(x)$ дифференцируема в точке x_0, а $f(x)$ дифференцируема в точке $g(x_0)$. Докажите, что $h(x)$ дифференцируема в точке x_0 и выразите $h'(x_0)$ через f, g, f' и g'.

М29◇8. Пусть f дифференцируема в точке x_0 и $f'(x_0) > 0$. Найдётся ли у точки x_0 такая ε-окрестность, где $f(x) > f(x_0)$ при $x > x_0$ и $f(x) < f(x_0)$ при $x < x_0$?

М29◇9 (теорема Ферма). Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой ε-окрестности U точки x_0, дифференцируема в точке x_0 и $f(x) \leqslant f(x_0)\ \ \forall\, x \in U$. Вычислите $f'(x_0)$.

М29◇10 (теорема Ролля). Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a, b]$, дифференцируема во всех точках (a, b), и $f(a) = f(b)$. Существует ли точка $x_0 \in (a, b)$, в которой $f'(x_0) = 0$?

М29◇11 (теорема Лагранжа). Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема во всех точках (a, b). Всегда ли найдётся такая точка $x_0 \in (a, b)$, в которой $f'(x_0) = (f(b) - f(a))\big/(b - a)$?

М29◇12. Верно ли, что для любой дифференцируемой в некоторой окрестности $[a, b]$ функции f, такой что $f'(a) > 0$, а $f'(b) < 0$, существует $x_0 \in [a, b]$ такое, что $f'(x_0) = 0$?

М29◇13 (теорема Дарбу). Принимает ли производная произвольной дифференцируемой в некоторой окрестности $[a, b]$ функции f все значения, лежащие между $f'(a)$ и $f'(b)$?

Приложения производных к исследованию функций.

Функции, дифференцируемые на отрезке. Пределы $\lim\limits_{x\nearrow x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ и $\lim\limits_{x\searrow x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ (если они существуют и конечны) называются *левой* и *правой* производными функции f в точке x_0. Функция $f(x)$ называется *дифференцируемой на отрезке* $[a,b]$, если она дифференцируема в каждой точке (a,b) и имеет левую производную в точке b и правую в точке a. Говорят, что функция $f(x)$ принадлежит классу $\mathscr{C}^k[a,b]$, если сама f и её первые $(k-1)$ производных f', f'', …, $f^{(k-1)}$ дифференцируемы на $[a,b]$, причём k-тая производная $f^{(k)}=\left(f^{(k-1)}\right)'$ непрерывна на $[a,b]$. Пересечение $\mathscr{C}^\infty[a,b]\overset{\text{def}}{=}\bigcap\limits_{k\geqslant 0}\mathscr{C}^k[a,b]$ называется пространством *бесконечно гладких* функций на $[a,b]$.

М30◇1°. Пусть функции f и g дифференцируемы на $[a,b]$ и $f'\equiv g'$ всюду на $[a,b]$. Верно ли, что разность $f-g$ постоянна на $[a,b]$?

М30◇2. Пусть f дифференцируема на $[a,b]$ и $f'(x)>0\ \ \forall x\in[a,b]$. Верно ли, что f строго возрастает на $[a,b]$? Что изменится, если заменить неравенство $f'(x)>0$ на неравенство:
а) $f'(x)\geqslant 0$? **б)** $f'(x)<0$? **в)** $f'(x)\leqslant 0$?

М30◇3. Пусть f строго убывает на $[a,b]$. Верно ли, что $\forall x\in[a,b]$ **а)** $f'(x)>0$; **б)** $f'(x)\geqslant 0$?

М30◇4. Что изменится в предыдущей задаче, если: **а)** f строго возрастает;
б) f монотонно неубывает; **в)** f монотонно невозрастает.

Локальные экстремумы. Точка x_0 называется точкой *локального максимума* (соотв. *минимума*) функции f, если существует ε-окрестность U точки x_0, такая, что $f(x)<f(x_0)$ (соотв. $f(x)>f(x_0)$) $\forall x\in U$. Вкупе, локальные максимумы и минимумы называются *локальными экстремумами* функции f. Точки x, где f дифференцируема и $f'(x)=0$ называются *стационарными точками* функции f.

М30◇5°. Верно ли, что локальные экстремумы дифференцируемой функции являются её стационарными точками? Верно ли обратное?

М30◇6*. Существует ли **а)** какая-нибудь **б)** непрерывная **в)** дифференцируемая функция с непустым множеством локальных максимумов, устроенным так, что в любой окрестности любого локального максимума имеются другие локальные максимумы?

М30◇7. Пусть производная дифференцируемой функции непрерывно возрастает в некоторой окрестности точки x_0, меняя в x_0 знак с минуса на плюс. Являются ли x_0 её локальным минимумом? Есть ли аналогичный критерий для локального максимума?

Направления выпуклости. Функция f называется *строго выпуклой вверх* (соотв. *вниз*) на отрезке $[a,b]$, если $\forall[\alpha,\beta]\subset[a,b]$ график $f(x)$ над (α,β) лежит строго выше (соотв. ниже) отрезка, соединяющего точки $(\alpha,f(\alpha))$ и $(\beta,f(\beta))$. Если f строго выпукла на $[a,b]$ и строго выпукла в другую сторону на $[b,c]$, то точка $b\in[a,c]$ называется *точкой перегиба* графика функции f.

М30◇8. Докажите, что дифференцируемая на отрезке $[a,b]$ функция f строго выпукла вверх тогда и только тогда, когда $f'(x)$ убывает на $[a,b]$, и аналогичный критерий выпуклости вниз.

М30◇9. Пусть дважды дифференцируемая на $[a,c]$ функция f имеет перегиб в точке $b\in(a,c)$. Является ли b локальным экстремумом для f'?

М30◇10. Пусть у дважды дифференцируемой на $[a,b]$ функции $f'(x_0)=0$ и **а)** $f''(x_0)>0$ **б)** $f''(x_0)<0$. Имеет ли f в x_0 локальный экстремум, и если да, то какого типа?

М30◇11 (неравенство Иенсена). Пусть $f''\geqslant 0$ всюду на $[a,b]$. Докажите, что для любых $x_k\in[a,b]$ и $\lambda_k>0$ выполнено неравенство $f\left(\left(\sum\lambda_k x_k\right):\left(\sum\lambda_k\right)\right)\leqslant\left(\sum\lambda_k f(x_k)\right):\left(\sum\lambda_k\right)$.

М30◇12 (неравенство Коши - Буняковского). Докажите, что $(x_1y_1+x_2y_2+\dots+x_ny_n)^2\leqslant(x_1^2+x_2^2+\dots+x_n^2)(y_1^2+y_2^2+\dots+y_n^2)$ и опишите все случаи, когда имеет место равенство.

М30◇13. Пусть функция f всюду дифференцируема на $[0,+\infty)$ и $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=a\in\mathbb{R}$. Верно ли, что график функции f имеет при $x\to+\infty$ асимптоту вида $y=ax+b$?

Упражнения в дифференцировании

М31◇1°. Вычислите производную от каждой тригонометрической функции.

М31◇2° (теорема об обратной функции). Пусть f дифференцируема на $[a,b]$, $f'>0$ всюду на (a,b), и $f(a)=\alpha$, $f(b)=\beta$. Докажите, что f отображает $[a,b]$ на $[\alpha,\beta]$ взаимно однозначно, причём обратная к f функция $g:[\alpha,\beta]\longrightarrow[a,b]$ дифференцируема, и $\forall\,\gamma\in[\alpha,\beta]$ выразите $g'(\gamma)$ через $f'(g(\gamma))$.

М31◇3°. Продифференцируйте: **а)** x^α, $\alpha\in\mathbb{Q}$ **б)** $\arcsin x$ **в)** $\arccos x$ **г)** $\operatorname{arctg} x$

М31◇4°. Продифференцируйте: **а)** $x\sqrt{1-x^2}$ **б)** $\sqrt[m+n]{(1-x)^m(1+x)^n}$ **в)** $\operatorname{arctg}\dfrac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}$ **г)** $\sqrt[3]{\dfrac{1+x^3}{1-x^3}}$ **д)** $\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x}}}$ **е)** $\sin\left(\cos^2 x\right)\cdot\cos\left(\sin^2 x\right)$ **ж)** $\arcsin\dfrac{1-x^4}{1+x^4}$

М31◇5°. Вычислите все производные от: **а)** $\sin x$ **б)** $\cos x$ **в)** $1/x$ **г)** $\sqrt[m]{1+\alpha x}$

М31◇6. Вычислите 9-ю производную от: **а)** $\prod\limits_{k=1}^{8}(x+k)$ **б)** $\prod\limits_{k=1}^{9}(x+k)$ **в)** $\prod\limits_{k=1}^{10}(x+k)$ **г)** $(1+x)/\sqrt{1-x}$ **д)** $1/(x(x+1))$ **е)** $1/(x^2-1)$ **ж*)** $1/(x^2+1)$ **з*)** $1/(x^2+x+1)$

М31◇7°. Найдите inf, sup и все локальные экстремумы функций: **а)** $|x^2-3x+2|$ на $[-10,10]$; **б)** $\dfrac{1+x^2}{1+x^4}$ на $[0,+\infty)$ **в)** $\dfrac{2x}{1+x^2}$ на всём $\mathbb{R}$ и на $[-1,2]$ **г)** $x\sqrt[3]{x-1}$ на $[-2,5]$

М31◇8. Верно ли, что: **а)** $\sin x > x - x^3/6$ при $x>0$? **б)** $\operatorname{tg} x > x + x^3/3$ при $0<x<\pi/4$?

М31◇9°. Найдите кратчайшее расстояние от точки $(7,6)$ до параболы $y=x^2+x+1$.

М31◇10. Соберётся ли, отразившись от параболы $y=ax^2+bx+c$, в одной точке параллельный пучок лучей, падающий на неё по вертикали сверху? Если да, то в какой точке?

М31◇11*. Гипербола представляет собой ГМТ, разность расстояний от которых до двух данных точек F_1 и F_2 постоянна и равна δ. Докажите, что поток лучей от точечного источника света в F_1, отразившись от гиперболы, предстанет стороннему наблюдателю как поток лучей от точечного источника в F_2 и наоборот.

М31◇12*. Эллипс представляет собой ГМТ, сумма расстояний от которых до двух данных точек F_1 и F_2 постоянна и равна σ. Что произойдёт с отражённым от эллипса потоком лучей от точечного источника света в F_1?

М31◇13°. Найдите на эллипсе $4x^2+9y^2=36$ точку, касательная в которой сотавляет вместе с осями координат треугольник максимально возможной площади.

М31◇14°. Сколько перегибов у графика $y=\dfrac{x+1}{x^2+1}$? Лежат ли они на одной прямой?

М31◇15°. Постройте (с полным исследованием[1]) графики:

а) $y=x\operatorname{arctg} x$ **б)** $y=\dfrac{1-2x+4x^2}{1-2x+2x^2}$ **в)** $y=\dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$ **г)** $y=\sqrt[3]{\dfrac{x^2}{x+1}}$ **д)** $y=\dfrac{\cos x}{\cos 2x}$

М31◇16°. Под каким углом пересекаются кривые: **а)** $y=x^2$ и $x=y^2$ **б)** $y=\sin x$ и $y=\cos x$

М31◇17. Точка движется по координатной плоскости по закону $x=x(t)$, $y=y(t)$. Вектор $v(t)=\left(\dfrac{dx}{dt}(t),\dfrac{dy}{dt}(t)\right)$ называется *скоростью* точки. Докажите, что если $v(t)$ существует и непрерывен по t в окрестности t_0 и $\dfrac{dx}{dt}(t_0)\neq 0$, то $\exists$ окрестность t_0, где траектория является графиком дифференцируемой функции $y=f(x)$. Выразите $\dfrac{df}{dx}(t)$ через компоненты $v(t)$.

[1] т. е. как можно более точным указанием области определения, множества значений, промежутков возрастания - убывания, локальных экстремумов, направлений выпуклости, перегибов и асимптот

Дополнительные задачи про производные

M$31\frac{1}{2}$◇1. Всегда ли между двумя вещественными корнями многочлена $f \in \mathbb{R}[x]$ лежит вещественный корень многочлена f'?

M$31\frac{1}{2}$◇2* (теорема Декарта). Обозначим через $N(f)$ число положительных корней многочлена $f \in \mathbb{R}[x]$, а через $L(f)$ количество перемен знака в последовательности его коэффициентов. Верно ли, что: **а)** L и N не меняются от умножения f на $\pm x^m$ **б)** $L(f) \equiv N(f) \pmod 2$ **в)** $L(f') \leqslant L(f)$ **г)** $N(f) \leqslant N(f') + 1$ **д)** $L(f(x)) + L((-1)^{\deg f} f(-x)) \leqslant \deg f$ **е)** $N(f) \leqslant L(f)$ **ж)** $N(f) = L(f)$, если все корни f в поле $\mathbb{C}$ вещественны.

M$31\frac{1}{2}$◇3. Сколько вещественных корней у: **а)** $x^3 - 3x^2 - 9x + a$ **б)** $3x^4 - 4x^3 - 6x^2 + 12x - 20$

M$31\frac{1}{2}$◇4 (Правило Лопиталя). Пусть функции f и g определены и дифференцируемы всюду в некоторой окрестности точки x_0 за исключением самой этой точки, и при $x \to x_0$ отношение f/g представляет собой неопределённость вида **а)** $0/0$ **б)** ∞/∞. Докажите, что если $\lim\limits_{x\to x_0}\Big(f'/g'\Big)$ существует и равен $p \in \mathbb{R}$, то $\lim\limits_{x\to x_0}\Big(f/g\Big)$ тоже существует и равен p.

M$31\frac{1}{2}$◇5. Остаётся ли правило Лопиталя в силе, если x_0 и/или p равны $\pm\infty$ или ∞?

M$31\frac{1}{2}$◇6. Вычислите: **а)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\operatorname{tg} x - 1}{x^2}$ **б)** $\lim\limits_{x\to \pi/4}\dfrac{\sqrt[3]{\operatorname{tg} x} - 1}{2\sin^2 x - 1}$ **в)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 2x - 2\arcsin x}{x^2}$

M$31\frac{1}{2}$◇7 (формула Тейлора - Лагранжа). Докажите, что $\forall\ f \in \mathscr{C}^k[a,b]$ и $\forall\ x, x_0 \in [a,b]$

$$f(x) = \frac{1}{k!}\, f^{(k)}(\vartheta)\cdot(x-x_0)^k + \sum_{\nu=0}^{k-1}\frac{1}{\nu!}\, f^{(\nu)}(x_0)\cdot(x-x_0)^\nu$$

для некоторого ϑ из отрезка с концами в x_0 и x. (Совет: начните с $k = 1, 2, 3, \ldots$)

M$31\frac{1}{2}$◇8*. Заменяя иррациональности подходящими тейлоровскими разложениями (или как-то ещё) вычислите: **а)** $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{3/2}\left(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} - 2\sqrt{x}\right)$ **б)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[6]{x^6+x^5} - \sqrt[6]{x^6-x^5}\right)$ **в)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(\sin x) - x\sqrt[3]{1-x^2}}{x^5}$ **г)** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\sin x}\right)$ **д)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\left(\dfrac{1}{x} - \operatorname{ctg} x\right)$

M$31\frac{1}{2}$◇9. Пусть функция f бесконечно дифференцируема в ε-окрестности U точки x_0, и существует такая константа $c \in \mathbb{R}$, что $|f^{(n)}(x)| < c\ \ \forall x \in U$ и $\forall n \in \mathbb{N}$. Постройте степенной ряд вида $\sum\limits_{k\geqslant 0} a_k(x-x_0)^k \in \mathbb{R}[[(x-x_0)]]$, который $\forall x \in U$ абсолютно сходится к $f(x)$.

M$31\frac{1}{2}$◇10. Найдите в $\mathbb{Q}[[x]]$ два степенных ряда, которые при каждом $x \in \mathbb{R}$ абсолютно сходятся к $\sin(x)$ и к $\cos(x)$ соответственно.

M$31\frac{1}{2}$◇11. Рассмотрим ряды $\sin(z)$ и $\cos(z)$ из предыдущей задачи как элементы из $\mathbb{C}[[z]]$, а также ряд $e^z = \sum z^k/k! \in \mathbb{C}[[z]]$. Будут ли все три ряда абсолютно сходиться при любом $z \in \mathbb{C}$? Докажите *формулу Эйлера*: $\forall x, y \in \mathbb{R}\ \ e^{x+iy} = \cos(x) + i\,\sin(y)$ как комплексные числа.

M$31\frac{1}{2}$◇12 (Канторова лесенка). Существует ли монотонно неубывающая сюрьективная непрерывная функция $f : [\,0\,,\,1\,] \longrightarrow [\,0\,,\,1\,]$, у которой всюду за исключением, разве что, нигде не плотного подмножества меры нуль $f'(x)$ существует и равна нулю.

M$31\frac{1}{2}$◇13* (Лейбницева пила). Постройте непрерывную функцию на $[\,0\,,\,1\,]$, не дифференцируемую ни в одной точке.

M$31\frac{1}{2}$◇14*. Пусть $f'(x) \in \mathbb{R}$ существует $\forall x \in [a,b]$. Может ли f' быть всюду разрывна на $[a,b]$?

M$31\frac{1}{2}$◇15*. Функция $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ бесконечно дифференцируема и $\forall x \in \mathbb{R}\ \ \exists n \in \mathbb{N}$, такое что n-тая производная от f обращается в нуль в точке x. Верно ли, что f — многочлен?

Сходимость рядов[1]

Напоминания о сходящихся рядах. Суммой числового ряда $\sum c_\nu$ (вещественного или комплексного) называется предел его *частичных* сумм $\lim\limits_{n\to\infty}(c_0+c_1+\cdots+c_n)$. Если он существует, ряд называется *сходящимся*, если нет — *расходящимся*. Ряд называется *абсолютно сходящимся*, если все конечные суммы вида $|c_i|+|c_{i+1}|+\cdots+|c_{i+m}|$ ограничены сверху. Сходящийся ряд, который не является абсолютно сходящимся, называется *условно сходящимся*.

M32◇1. Приведите пример какого-нибудь условно сходящегося ряда. Можно ли перемешать его слагаемые так, чтобы **а)** сумма изменилась **б)** ряд перестал сходится

M32◇2*. Можно ли перемешать слагаемые произвольного условно сходящегося рада так, чтобы он стал **а)** расходиться **б)** сходиться к любому наперёд заданному числу (в т. ч. $\pm\infty$)?

M32◇3. Докажите, что всякий абсолютно сходящийся ряд сходится, причём его сумма не меняется при перемешивании слагаемых.

M32◇4 (критерий Коши). Докажите, что для абсолютной сходимости ряда $\sum c_\nu$ необходимо и достаточно, чтобы $\forall\,\varepsilon>0\quad\exists\,n\in\mathbb{N}\ :\ |c_k|+|c_{k+1}|+\cdots+|c_{k+m}|<\varepsilon\ \forall\,k>n$ и $\forall\,m\in\mathbb{N}$.

M32◇5. Докажите, что ряд $\sum a_\nu b_\mu$, составленный из всевозможных попарных произведений (всё равно в каком порядке) членов двух абсолютно сходящихся рядов $\sum a_\nu$ и $\sum b_\mu$ абсолютно сходится к произведению сумм рядов-сомножителей.

M32◇6 (признаки Абеля и Дирихле). Сходится ли ряд $\sum\limits_n a_n b_n$, если:

а) ряд $\sum|a_\nu|$ сходится, а числа b_ν ограничены?

б) частичные суммы $a_1+\cdots+a_n$ ограничены, а b_ν монотонно стремятся к нулю при $\nu\to\infty$?

M32◇7 (признак Коши). Докажите, что ряд $\sum c_\nu$ абсолютно сходится, если существует (вещественное) $q<1$, такое что $\sqrt[\nu]{|c_\nu|}\leqslant q$ при всех $\nu\gg0$.

M32◇8 (признак Даламбера). Докажите, что ряд $\sum c_\nu$ абсолютно сходится, если существует (вещественное) $q<1$, такое что $|c_{\nu+1}/c_\nu|\leqslant q$ при всех $\nu\gg0$.

M32◇9. Сходятся ли: **а)** $\displaystyle\sum_{n\geqslant1}\binom{2n}{n}^{-1}$ **б)** $\displaystyle\sum_{n\geqslant1}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ **в)** $\displaystyle\sum_{n\geqslant1}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n(n-1)}$ **г)** $\displaystyle\sum_{n\geqslant1}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$

M32◇10* (радиус сходимости степенного ряда). Докажите, что ряд $\sum a_n x^n$ абсолютно сходится при любом $|x|<\varrho$ и расходится при любом x с $|x|>\varrho$, где $\varrho\in\mathbb{R}$ — это число, обратное к твг множества[2] предельных точек последовательности $\sqrt[n]{|a_n|}$.

M32◇11*. Сравните радиусы сходимости формального степенного ряда f и его формального производного ряда f'.

M32◇12*. Пусть формальный степенной ряд $f(x)=\sum a_n x^n$ имеет ненулевой радиус сходимости ϱ. Зададимся произвольным числом r, таким что $0<r<\varrho$. Докажите, что $\forall\,\varepsilon>0$ $\exists\,m\in\mathbb{N}$. такое что $\forall\,n>m$ неравенство $|f(x)-a_0-a_1x-\cdots-a_nx^n|<\varepsilon$ выполняется сразу для всех x с $|x|<r$ (это явление называется *равномерной* (по $x:|x|<r$) сходимостью).

M32◇13*. Докажите, что сумма степенного ряда с ненулевым радиусом сходимости ϱ является бесконечно дифференцируемой функцией в области $|x|<\varrho$ (подсказка: *равномерно* по x приблизьте $f'(x)$ и $f(x)$ частичными суммами, и одновременно — по формуле для производной как предела приращений — приблизьте частичную сумму производного ряда отношением приращений частичной суммы самого ряда).

M32◇14*. Пусть числа r и R обратны, соответственно, твг и тнг предельных точек последовательности $|a_{n+1}/a_n|$. Сходится ли степенной ряд $\sum a_n x^n$ при $|x|<r$ и $|x|>R$? Какие неравенства связывают r, R и радиус сходимости? Бывают ли они строгими?

[1] задачи этого листка можно решать в $\mathbb{R}$, в $\mathbb{C}$, или и там и там

[2] если это множество неограничено, полагают $\varrho=0$; число ϱ называется *радиусом сходимости* степенного ряда

Метрические пространства

Метрическое пространство — это множество $\mathscr{M}$, на котором для каждой пары элементов (p,q) задано неотрицательное *расстояние* $\varrho(p,q)=\varrho(q,p)\in\mathbb{R}_{\geqslant 0}$, обращающееся в нуль тогда и только тогда, когда $p=q$, и удовлетворяющее *неравенству треугольника*: $\varrho(p,q)+\varrho(q,r)\geqslant\varrho(p,r)\ \forall\, p,q,r\in\mathscr{M}$.

М$32\frac{1}{2}$◇1°. Какие из перечисленных ниже множеств с «расстоянием» являются метрическими пространствами: **а)** непрерывные функции на отрезке $[a,b]$ с $\varrho(f,g)=\sup_{x\in[a,b]}|f(x)-g(x)|$

б) $\mathbb{Q}$ с $\varrho(x,y)=|x-y|$ **в*)** отрезки числовой прямой с $\varrho\Big([a,b]\,,\,[c,d]\Big)=|a-c|+|b-d|$

г) $\mathbb{R}^n$ с $\varrho\Big((x_1,\,\dots,x_n)\,,\,(y_1,\,\dots,y_n)\Big)=\sqrt{\sum(x_i-y_i)^2}$ **д)** то же, но $\varrho=\max_i|x_i-y_i|$

е) ограниченные последовательности $(a_n)\subset\mathbb{R}$ с $\varrho\Big((a_n)\ ,\ (b_n)\Big)=\sup_i|a_i-b_i|$

ж*) $\Big\{(a_n)\subset\mathbb{R}\,|\ \text{ряд } \sum a_i^2 \text{ сходится}\Big\}$ с $\varrho\Big((a_n)\ ,\ (b_n)\Big)=\sqrt{\sum(a_n-b_n)^2}$

Шары и топология. В метрическом пространстве $\mathscr{M}$ для любого вещественного $\varepsilon>0$ подмножество $D_\varepsilon(p)=\{x\in\mathscr{M}\,|\ \varrho(p,x)<\varepsilon\}$ называютмя *открытым*, а $\overline{D}_\varepsilon(p)=\{x\in\mathscr{M}\,|\ \varrho(p,x)\leqslant\varepsilon\}$ — *замкнутым шаром* радиуса ε с центром p (обязательно продумайте, как устроены шары в пространствах зад. М$32\frac{1}{2}$◇1). Открытый шар $D_\varepsilon(p)$ также называют *ε-окрестностью* точки $p\in\mathscr{M}$. Предельные, внутренние и изолированные точки подмножеств $X\subset\mathscr{M}$, открытые и замкнутые множества, пределы последовательностей $(x_n)\subset\mathscr{M}$, непрерывные функции $\mathscr{M}\longrightarrow\mathbb{R}$ определяются в произвольном метрическом пространстве $\mathscr{M}$ дословно так же, как в $\mathscr{M}=\mathbb{R}$. Например, последовательность элементов $(x_n)\subset\mathscr{M}$ называется *последовательностью Коши*, если $\forall\,\varepsilon>0\quad\exists\,n\in\mathbb{N}\ :\ \varrho(x_m,x_k)<\varepsilon\quad\forall\,m,k>n$. Метрическое пространство называется *полным*, если все последовательности Коши имеют в нём пределы.

М$32\frac{1}{2}$◇2°. Может ли иметь предел последовательность, не являющаяся последовательностью Коши? Может ли последовательность Коши иметь несколько пределов?

М$32\frac{1}{2}$◇3. Подмножество $M\subset\mathscr{M}$ называется *ограниченным*, если существуют $C\in\mathbb{R}$ и $m\in\mathscr{M}$, такие что $\varrho(m,x)<C\ \forall\,x\!\in\!M$. Всякая ли ограниченная последовательность содержит подпоследовательность Коши: **а)** в $\mathbb{R}^n$? **б)** в произвольном метрическом пространстве?

М$32\frac{1}{2}$◇4. Какие из метрических пространств зад. М$32\frac{1}{2}$◇1 полны?

М$32\frac{1}{2}$◇5. Докажите, что пересечение конечных и объединение любых наборов открытых множеств открыто, и аналогичные свойства замкнутых множеств. Верно ли, что $U\subset\mathscr{M}$ открыто $\iff\mathscr{M}\setminus U$ замкнуто? Открыты ли открытые шары? Замкнуты ли замкнутые?

М$32\frac{1}{2}$◇6 (теорема о вложенных шарах). Равносильна ли полнота метрического пространства тому, что любая последовательность вложенных замкнутых шаров со стремящимися к нулю радиусами имеет в нём непустое пересечение? Всегда ли это пересечение — одна точка?

М$32\frac{1}{2}$◇7 (теорема о неподвижной точке). Отображение $\mathscr{M}\xrightarrow{F}\mathscr{M}$ называется *сжимающим*, если $\exists\,c\in\mathbb{R}\ :\ 0<c<1$ и $\varrho(F(x),F(y))\leqslant c\cdot\varrho(x,y)\ \forall\,x,y\in\mathscr{M}$. Докажите, что если $\mathscr{M}$ полно, то любое сжимающее отображение F имеет единственную неподвижную точку, причём к ней сходится любая последовательность вида $x,\ F(x),\ F(F(x)),\ \dots$

М$32\frac{1}{2}$◇8. Пусть $X\subset\mathscr{M}$ удовлетворяет *условию Больцано - Вейерштрасса*: любая последовательность элементов X имеет в X предельную точку. Докажите, что

а) $\forall\,\varepsilon>0\quad X$ покрывается конечным множеством шаров радиуса $\leqslant\varepsilon$

б) $\forall$ открытого покрытия X можно указать $\varepsilon>0$ так, что всякий шар радиуса $\leqslant\varepsilon$ с центром в X целиком содержится хотя бы в одном из множеств покрытия

в) в любом покрытии X открытыми множествами содержится конечное подпокрытие

М$32\frac{1}{2}$◇9 (компактные подмножества $\mathbb{R}^n$). Докажите, что для подмножества $X\subset\mathbb{R}^n$ (с любой метрикой из зад. М$32\frac{1}{2}$◇1) условие Больцано - Вейерштрасса, условие одновременной ограниченности и замкнутости, и условие наличия в любом открытом покрытии конечного подпокрытия попарно эквивалентны.

Мера на прямой

Измеримые множества. Напомним, что произвольное открытое множество $U \subset \mathbb{R}$ представляет собою объединение конечной или счётной системы попарно непересекающихся интервалов, концами которых могут быть $\pm\infty$. Суммарная длина всех этих интервалов обозначается $\mu(U)$ и называется *мерой* открытого множества U, т. е. $\mu\left(\bigsqcup_i (a_i, b_i)\right) \overset{\text{def}}{=} \sum_i |b_i - a_i|$. Если ряд расходится или среди a_i, b_j встречается $\pm\infty$, полагают $\mu(U) = \infty$. Для произвольного множества $M \subset \mathbb{R}$ тнг мер $\mu(U)$ всех открытых $U \supset M$ обозначается $\mu^*(M)$ и называется *верхней мерой* M. Множество M называется *измеримым*, если $\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists$ открытое $U \subset \mathbb{R}$, такое что[1] $\mu^*(M \vartriangle U) < \varepsilon$.

М$32\frac{2}{3}\diamond$1. Пусть $U \subset V$ открыты. Верно ли, что **а)** $U \neq V$ и V ограничено $\Rightarrow \mu(U) < \mu(V)$ **б)** $\mu(U) < \infty \Rightarrow U$ ограничено **в)** U ограничено $\Rightarrow \mu(U) < \infty$

М$32\frac{2}{3}\diamond$2. Составляют ли ограниченные открытые подмножества $U \subset \mathbb{R}$ метрическое пространство относительно «расстояния» $\varrho(U, V) = \mu^*(U \vartriangle V)$?

М$32\frac{2}{3}\diamond$3. Всегда ли $\mu^*(M_1 \vartriangle M_2) = \mu^*(M_1' \vartriangle M_2')$ при $\mu^*(M_1 \vartriangle M_1') = 0$ и $\mu^*(M_2 \vartriangle M_2') = 0$?

М$32\frac{2}{3}\diamond$4 (мера измеримого множества). Пусть M измеримо. Докажите, что $\forall$ последовательности открытых множеств U_n, такой что $\mu^*(M \vartriangle U_n) \to 0$, $\exists$ одинаковый для всех таких последовательностей $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(U_n)$ (он обозначается $\mu(M)$ и называется *мерой* M).

М$32\frac{2}{3}\diamond$5. Верно ли, что $\mu^*(M) = 0 \Rightarrow M$ измеримо и $\mu(M) = 0$?

М$32\frac{2}{3}\diamond$6. Пусть $\mu^*(M_1 \vartriangle M_2) = 0$. Равносильна ли измеримость M_1 измеримости M_2? Верно ли, что $\mu(M_1) = \mu(M_2)$, если оба M_i измеримы?

М$32\frac{2}{3}\diamond$7. Пусть $M_1 \subsetneq M_2$ измеримы. Всегда ли **а)** $\mu(M_1) \leqslant \mu(M_2)$ **б)** $\mu(M_1) < \mu(M_2)$

М$32\frac{2}{3}\diamond$8. Пусть $M_1 \cap M_2 = \varnothing$ и $M_3 = M_1 \cup M_2$. Верно ли, что если какие-то два из множеств M_i измеримы, то измеримо и третье, причём $\mu(M_3) = \mu(M_2) + \mu(M_1)$?

М$32\frac{2}{3}\diamond$9. Измеримо ли **а)** $M_1 \cap M_2$ **б)** $M_1 \cup M_2$ **в)** $M_1 \vartriangle M_2$ если M_1 и M_2 измеримы?

М$32\frac{2}{3}\diamond$10. Равносильна ли измеримость M тому, что **а)** $\exists$ открытое $U : \mu^*(M \vartriangle U) = 0$? **б)** $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists$ измеримое $M' : \mu^*(M \vartriangle M') < \varepsilon$?

М$32\frac{2}{3}\diamond$11*. Имеется бесконечная последовательность измеримых множеств $M_i \subset [\,0\,,\,1\,]$. Верно ли, что **а)** $\bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} M_i$ измеримо и его мера равна $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(M_1 \cup M_2 \cup \cdots \cup M_n)$?

б) $\bigcap\limits_{i\in\mathbb{N}} M_i$ измеримо и его мера равна $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(M_1 \cap M_2 \cap \cdots \cap M_n)$?

в) если $\forall\, e > 0\ \exists n \in \mathbb{N} : \mu^*(M_k \vartriangle M_m) < \varepsilon\ \forall\, m, k > n$, то $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \mu(M_i)$?

М$32\frac{2}{3}\diamond$12*. Что изменится, если в предыдущей задаче условие «все $M_i \subset [\,0\,,\,1\,]$» : **а)** заменить условием «каждое из M_i ограничено» **б)** отбросить вообще?

М$32\frac{2}{3}\diamond$13* (толстое Канторово множество). Постройте на $[\,0\,,\,1\,]$ нигде не плотное замкнутое измеримое подмножество положительной меры.

М$32\frac{2}{3}\diamond$14*. Начав со всех открытых и замкнутых множеств, строят новые множества делая за 1 шаг пересечение или объединение **а)** конечного **б)** не более чем счётного семейства уже построенных множеств. Можно ли построить неизмеримое множество за конечное число таких шагов? А за счетное?

М$32\frac{2}{3}\diamond$15* (пример неизмеримого множества). Назовём *классом $\mathbb{Q}$-эквивалентности* вещественного числа $a \in [\,0\,,\,1\,]$ множество всех $b \in [\,0\,,\,1\,]$, таких что $b - a \in \mathbb{Q}$ (убедитесь, что любые два класса $\mathbb{Q}$-эквивалентности или не пересекаются или совпадают!). Пользуясь аксиомой выбора, построим множество $M \subset [\,0\,,\,1\,]$, содержащее ровно по одному элементу из каждого класса $\mathbb{Q}$-эквивалентности. Может ли M получиться измеримым?

[1] напомним, что *симметрическая разность* $M \vartriangle U \overset{\text{def}}{=} (M \setminus U) \cup (U \setminus M)$

Экспонента и логарифм[1]

M33◇1. Пусть формальный степенной ряд $f(x) = \sum\limits_{k\geqslant 0} a_k x^k$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $f' = f$. Выразите все коэффициенты a_k через a_0.

M33◇2 (экспонента). Докажите, что ряд $e^x \stackrel{\text{def}}{=} \sum\limits_{\nu\geqslant 0} x^\nu/\nu!$ абсолютно сходится при всех x.

M33◇3. Докажите $\forall\, a, b$ основное экспоненциальное тождество[2]: $e^{a+b} = e^a e^b$.

M33◇4. Для любых положительных ε, $\varrho \in \mathbb{R}$ подберите $n \in \mathbb{N}$ так, чтобы $\forall\ k \geqslant n$ неравенство $|1 + x + x^2/2 + \cdots + x^k/k! - e^x| < \varepsilon$ было выполнено *сразу для всех* x с $|x| \leqslant \varrho$.

M33◇5. Вычислите **а)** $\lim\limits_{x\to 0} e^x$ **б)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x}$ **в*)** $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n$ (ответ: e^x)

M33◇6. Докажите, что функция e^x всюду дифференцируема и вычислите $(e^x)'$.

M33◇7*. Верно ли, что любой ряд $f(x)$ из зад. M33◇1 абсолютно сходится при всех x к всюду дифференцируемой функции? Опишите[3] все дифференцируемые функции на интервале (a, b), удовлетворяющие дифференциальному уравнению $f'(x) = f(x)$ при всех $x \in (a, b)$.

Обозначение. Через $\mathbb{R}^{>0} \subset \mathbb{R}$ мы обозначаем множество всех *положительных* вещественных чисел. Отметим, что оно замкнуто относительно операций умножения и деления.

M33◇8. Докажите, что функция $y = e^x$ является монотонно возрастающей биекцией из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}^{>0}$, и постройте её примерный график.

M33◇9*. Любая ли непостоянная непрерывная функция $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}^{>0}$, удовлетворяющая тождеству $f(a+b) = f(a)f(b)\ \forall\ a, b \in \mathbb{R}$, переводит 0 в 1, всюду дифференцируема и удовлетворяет дифференциальному уравнению $f'(x) = f(x)$? Опишите все такие функции.

M33◇10 (логарифм). Функция $y = \ln x$, обратная к функции $y = e^x$, называется *натуральным логарифмом*[4]. Докажите, что функция $\mathbb{R}^{>0} \xrightarrow{x\mapsto \ln x} \mathbb{R}$ является монотонно возрастающей всюду дифференцируемой биекцией и удовлетворяет основному логарифмическому тождеству $\ln(ab) = \ln a + \ln b \quad \forall\, a, b \in \mathbb{R}^{>0}$. Постройте её примерный график и вычислите $\ln'(x)$.

M33◇11 (логарифмическая производная). Выразите $\Big(\ln\big(f(x)\big)\Big)'$ через f и f' и вычислите производную произведения $(1 + 3\,x^2)^3 \cdot (1 - 5\,x^4)^2 \cdot (21 + 7\,x^5)$.

M33◇12*. Любая ли непостоянная непрерывная функция $\mathbb{R}^{>0} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, удовлетворяющая тождеству $f(ab) = f(a) + f(b)\ \forall\ a, b \in \mathbb{R}^{>0}$, переводит 1 в 0, взаимно однозначна и всюду дифференцируема? Опишите все такие функции.

M33◇13*. Является ли функция $\mathbb{C} \xrightarrow{z\mapsto e^z} \mathbb{C}$ периодической? Если да, каков период? Найдите множество её значений и укажите в $\mathbb{C}$ какую-нибудь область, взаимно однозначно отображаемую на это множество.

M33◇14* (комплексный логарифм). Пусть $Ln\,(z) \stackrel{\text{def}}{=} \ln|z| + i\,Arg\,(z)$ (напомним, что $Arg\,(z)$ — это *многозначная* функция). Найдите все значения: **а)** $Ln\,(-1)$ **б)** $Ln\,(ie)$ **в)** $e^{Ln\,(z)}$, где $z \neq 0$ **г)** $Ln(e^z)$

M33◇15*. Каков радиус сходимости ϱ у степенного ряда $\ln(1+x) = \sum\limits_{n\geqslant 1}(-1)^{n+1}x^n/n$? Докажите, что при вещественных x с $|x| < \varrho$ правая часть и в самом деле абсолютно сходится к $\ln(1+x)$. Что происходит при $x = \pm\varrho$?

---

[1] задачи 1 – 5 можно решать в $\mathbb{R}$, в $\mathbb{C}$, или и там и там

[2] подсказка: проверьте сначала, что это тождество выполнено для формальных степенных рядов от a, b, потом докажите, что все ряды абсолюьно сходятся и примените зад. M32◇5

[3] подсказка: пусть $f' = f$; найдите $(fe^{-x})'$.

[4] иначе говоря, $\ln x$ — это степень, в которую надо возвести число e, чтобы получить x

Степенные, показательные и логарифмические функции

Определения и обозначения. Для любых $a \in \mathbb{R}^{>0}$ и $b \in \mathbb{R}$ через a^b обозначается действительное число $e^{b\ln a}$. При фиксированном $b \in \mathbb{R}$ функция $x \mapsto x^b$, заданная на подмножестве $\mathbb{R}^{>0} \subset \mathbb{R}$, называется *степенной функцией с показателем* b. При фиксированном $a \in \mathbb{R}^{>0}$ функция $x \mapsto a^x$, заданная на всём $\mathbb{R}$, называется *показательной функцией с основанием* a.

М34◇1. Верно ли, что **а)** $a^b a^c = a^{b+c}\ \forall\, a \in \mathbb{R}^{>0},\ \forall\, b, c \in \mathbb{R}$ **б)** $b^a c^a = (bc)^a\ \forall\, a \in \mathbb{R}$ и $\forall\, b, c \in \mathbb{R}^{>0}$ **в)** $a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}\ \forall\, m, n \in \mathbb{N}$ и $\forall\, a \in \mathbb{R}^{>0}$ **г)** $a^{-b} = (1/a)^b = 1/(a^b)\ \forall\, a \in \mathbb{R}^{>0},\ \forall\, b \in \mathbb{R}$. **д)** $\left(a^b\right)^c = a^{bc}\ \forall\, a \in \mathbb{R}^{>0},\ \forall\, b, c \in \mathbb{R}$

М34◇2. Каким неравенством связаны при $x \in \mathbb{R}^{>0}$ и $\alpha \in (\,0\,,\,1\,)$ функции: **а)** $\ln(1+\alpha x)$ и $\alpha \ln(1+x)$ **б)** $1+\alpha x$ и $(1+x)^\alpha$

М34◇3. Вычислите производную степенной функции $y = x^b$ и постройте её график при разных $b \in \mathbb{R}$. При каких b степенная функция $\mathbb{R}^{>0} \xrightarrow{x \mapsto x^b} \mathbb{R}^{>0}$: **а)** взаимно однозначна **б)** строго монотонна **в)** выпукла вверх **г)** выпукла вниз **д)** возрастает **е)** убывает

М34◇4. Вычислите производную показательной функции $y = a^x$ и постройте её график при разных $a \in \mathbb{R}^{>0}$. При каких a показательная функция $\mathbb{R} \xrightarrow{x \mapsto a^x} \mathbb{R}^{>0}$: **а)** строго монотонна **б)** взаимно однозначна **в)** выпукла вверх **г)** выпукла вниз **д)** возрастает **е)** убывает

М34◇5 (логарифм по произвольному основанию). Докажите, что $\forall\, x \in \mathbb{R}^{>0}$ и любого положительного $c \neq 1$ существует единственное число $y \in \mathbb{R}$, такое что $c^y = x$ (это число называется *логарифмом* x *по основанию* c и обозначается $\log_c x$). Выразите $\log_c x$ через $\ln c$ и $\ln x$, вычислите производную $\log_c' x$ и постройте график функции $\mathbb{R} \xrightarrow{x \mapsto \log_c x} \mathbb{R}^{>0}$ при разных $c \in \mathbb{R}^{>0}$. При каких c она **а)** строго монотонна **б)** взаимно однозначна **в)** выпукла вверх **г)** выпукла вниз **д)** возрастает **е)** убывает

М34◇6 (формулы замены основания). При каких a, b, c выполняются равенства $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$ и $a^b = c^{b \log_c a}$? Справедливы ли для функций $y = \log_a x$ и $y = a^x$ с произвольным $a \in \mathbb{R}^{>0} \setminus \{1\}$ тождества из зад. М33◇3 и зад. М33◇10?

М34◇7. Найдите производные от функций: **а)** $e^{\cos^2 x}$ **б)** $x\, e^{x \ln x}$ **в)** $\log_x \left(x^{\ln x}/e^x\right)$ **г)** x^x **д)** x^{x^x}

М34◇8. Вычислите: **а)** $\lim\limits_{x\to\pm\infty} (e^x/x^m)\ \ \forall\, m \in \mathbb{N}$ **б)** $\lim\limits_{x\to\infty} \Big(\ln(x) \,/\, \sqrt[m]{x}\Big)\ \forall\, m \in \mathbb{N}$ **в)** $\lim\limits_{x\to 0}(x \ln x)$ **г)** $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{e^x - 1}\right)$ **д)** $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{1}{\ln x} - \dfrac{1}{x-1}\right)$ **е)** $\lim\limits_{x\to 1} x^{1/(1-x)}$ **ж)** $\lim\limits_{x\to 0} x^{x^x - 1}$ **з)** $\lim\limits_{x\to 0} (\ln(1/x))^x$

М34◇9. Постройте (с полным исследованием) графики функций: **а)** $x \ln x$ **б)** $e^{-x}\cdot(3x-1)$ **в)** $\dfrac{e^x}{(1+x)}$ **г)** $\dfrac{\ln(x)}{\sqrt{x}}$ **д)** $\ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$ **е)** $\sqrt{1 - e^{-x^2}}$ **ж)** $x^{1/x}$ **з)** $(1+x)^{1/x}$

М34◇10. Какую кривую опишет на плоскости точка, координаты которой меняются по закону:

а) $\begin{cases} x(t) = \dfrac{(e^t + e^{-t})}{2} \\ y(t) = \dfrac{(e^t - e^{-t})}{2} \end{cases}$, **б*)** $\begin{cases} x(t) = \dfrac{(e^{it} + e^{-it})}{2} \\ y(t) = \dfrac{(e^{it} - e^{-it})}{2i} \end{cases}$, где $i = \sqrt{-1} \in \mathbb{C}$?

Первообразные

Определение и обозначения. Функция $y = F(x)$ называется *первообразной* функции $y = f(x)$ на некотором интервале (отрезке), если $F'(x) = f(x)$ всюду на этом интервале (отрезке). Обозначение: $F(x) = \displaystyle\int f(x)\,dx$. Это обозначение не вполне корректно, поскольку $\forall\ C \in \mathbb{R}$ функция $F(x) + C$ также является первообразной для f, и точно также можно написать, что $\displaystyle\int f(x)\,dx = F(x) + C$.

М35◇1. Есть ли функции, у которых нет первообразных?

М35◇2. Пусть $F'(x) = f(x)$. Найдите все остальные первообразные от f.

М35◇3. Найдите все первообразные от: **а)** произвольного многочлена **б)** $\sin x$ **в)** $\cos x$ **г)** e^x **д)** x^α, $\alpha \neq 0, 1$ **е)** $\sqrt[3]{1+x}$ **ж)** $1/x$ **з)** $(1+x^2)^{-1}$ **и)** $(1-x^2)^{-1/2}$ **к)** $(1-x^2)^{-1}$ **л)** $\sin^{-2} x$ **м)** $\cos^{-2} x$ **н)** $(x+b)^{-1}$ **о)** $(ax+b)^{-1}$ **п)** $(ax+b)^\alpha$ (всюду $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$)

М35◇4. Пусть $F'(x) = f(x)$. Найдите все первообразные от $g(x) = f(ax+b)$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

М35◇5. В приводимых ниже равенствах предполагается, что все написанные в правых частях первообразные существуют, а $C \in \mathbb{R}$ — произвольная константа. Верные равенства докажите, неверные — опровергните: **а)** $\displaystyle\int \Big(f(x) + g(x)\Big)\,dx + C = \int f(x)\,dx\ +\ \int g(x)\,dx$

б) $\displaystyle\int f(x)g(x)\,dx + C = \int f(x)\,dx \cdot \int g(x)\,dx$ **в)** $\displaystyle\int \lambda f(x)\,dx + C = \lambda \int f(x)\,dx\ \forall\,\lambda \in \mathbb{R}$

г) (интегрирование по частям) $\displaystyle\int f'(x)g(x)\,dx + C = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx$

М35◇6. Вычислите первообразные: **а)** $\displaystyle\int xe^x\,dx$ **б)** $\displaystyle\int x^2e^x\,dx$ **в)** $\displaystyle\int \ln x\,dx$ **г)** $\displaystyle\int \cos\ln x\,dx$

д) $\displaystyle\int x\,\cos x\,dx$ **е)** $\displaystyle\int \sin^2 x\,dx$ **ж)** $\displaystyle\int \operatorname{arctg} x\,dx$ **з)** $\displaystyle\int \sqrt{1-x^2}\,dx$ **и)** $\displaystyle\int e^{2x}\cos(3x)\,dx$

М35◇7 (замена переменного). Пусть функция $x = x(t)$ дифференцируема, а функция $y = f(x)$ является производной от функции $y = F(x)$. Верно ли, что $\displaystyle\int f(x(t))x'(t)\,dt = F(x(t)) + C$ с произвольным $C = \mathrm{const}$?

М35◇8. Вычислите первообразные[1]: **а)** $\displaystyle\int \frac{dx}{2-3x}$ **б)** $\displaystyle\int \frac{3x-1}{2-5x}\,dx$ **в)** $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt[3]{x^2-5}}$

г) $\displaystyle\int e^{3x-2}\,dx$ **д)** $\displaystyle\int 2^{5x-3}\,dx$ **е)** $\displaystyle\int \log_5(1-3x)\,dx$ **ж)** $\displaystyle\int \sin(5x+1)\,dx$

з) $\displaystyle\int \sin(2x)\cos(3x)\,dx$ **и)** $\displaystyle\int \operatorname{tg} x\,dx$ **к)** $\displaystyle\int \operatorname{ctg} x\,dx$ **л)** $\displaystyle\int \sin^2 x\,\cos^3 x\,dx$

м) $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\sin x}$ **н*)** $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^3 x}$ **о)** $\displaystyle\int \frac{(x+1)\,dx}{x^2+x+1}$ **п)** $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}$

р) $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{(1+x^2)^2}$ **с*)** $\displaystyle\int \frac{dx}{(1+x^2)^2}$ **т)** $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ **у)** $\displaystyle\int \sqrt{3-2x^2}\,dx$

---

[1] В качестве (трудного) примера найдём $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$. Рассмотрим y, такое что $1 + x^2 = y^2$. Как и единичная окружность, гипербола $y^2 - x^2 = 1$ имеет рациональную параметризацию $y(t) = (1+t^2)/2t$, $x(t) = (1-t^2)/2t$ (в силу тождества $(1+t^2)^2 - (1-t^2)^2 = (2t)^2$). Поэтому подставляя $x = (1-t^2)/2t$, получим $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \int \frac{1}{y(t)} \cdot x'(t)\,dt = \int \frac{2t}{1+t^2} \cdot \frac{1+t^2}{2t^2}\,dt = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| = \ln\left|x + \sqrt{1+x^2}\right|$, где t выражено через x из квадратного уравнения $t^2 + 2tx - 1 = 0$ (обязательно проверьте ответ дифференцированием!).

Эйлеровы разложения и ζ-функция Римана

M$35\frac{1}{2}\diamond$1 (формулы Виета – 2). Докажите, что многочлен $1 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ с корнями $z_1, z_2, \ldots, z_n$ раскладывается в произведение вида $\prod\limits_{k=1}^{n}(1 - \alpha_k x)$ и выразите константы α_ν через корни z_μ, и коэффициенты a_k — через константы α_i.

M$35\frac{1}{2}\diamond$2. Как при нечётном $n \in \mathbb{N}$ выразить **а)** $\cos(nx)/\cos x$ в виде многочлена от $\sin x$ **б)** $\sin(nx)$ в виде многочлена от $\sin x$ **в)** $\sin(nx)/\sin x$ в виде многочлена от $\sin^2 x$? Найдите степень, корни, старший и два младших коэффициента этого многочлена.

M$35\frac{1}{2}\diamond$3. Справедливы ли при нечётном n тождества: **а)** $\dfrac{\sin nx}{\sin x} = n \prod\limits_{\nu=1}^{\frac{n-1}{2}} \left(1 - \dfrac{\sin^2 x}{\sin^2(\pi\nu/n)}\right)$

б) $\dfrac{\sin nx}{\sin x} = (-4)^{\frac{n-1}{2}} \prod\limits_{\nu=1}^{\frac{n-1}{2}} \left(\sin^2 x - \sin^2(2\pi\nu/n)\right)$ **в)** $(-1)^{\frac{n-1}{2}} \sin nx = 2^{n-1} \prod\limits_{\nu=1}^{n-1} \sin\left(x + \dfrac{2\pi\nu}{n}\right)$

Эйлерово вычисление суммы квадратов гармонического ряда выглядело прмерно так. Из разложения синуса в степенной ряд следует, что $(\pi x)^{-1}\sin(\pi x) = 1 - (\pi^2/6)\cdot x^2 + (\pi^4/120)\cdot x^4 - \cdots$. Этот «многочлен бесконечной степени» имеет корни $x = \pm n$, где $n \in \mathbb{N}$, и «по теореме Виета» раскладывается в произведение $\prod(1 - x^2/n^2)$. Сравнивая коэффициенты при x^2, получаем $\sum(1/n)^2 = \pi^2/6$. Однако, «разложение по теореме Виета» не является *формальной операцией* и по сему требует уточнения.

Бесконечное произведение $\prod(1 - a_n)$, в котором n пробегает $\mathbb{N}$, и $a_n \in \mathbb{R}$, называется *сходящимся*, если существует $\lim\limits_{n\to\infty} \prod\limits_{\nu=1}^{n} (1 + a_\nu)$, называемый *значением* бесконечного произведения. Произведение называется *абсолютно сходящимся*, если для $n \gg 0$ определён и абсолютно сходится ряд $\sum \ln(1 + a_n)$. Неабсолютно сходящиеся произведения называют *условно* сходящимися.

M$35\frac{1}{2}\diamond$4. Равносильна ли сходимость произведения $\prod(1 + a_n)$ сходимости ряда $\sum\ln(1 + a_n)$?

M$35\frac{1}{2}\diamond$5. Докажите, что абсолютно сходящееся произведение сходится, причём его значение не меняется при перемешивании сомножителей.

M$35\frac{1}{2}\diamond$6. Пусть $c > 0$ — произвольная константа. Сходятся ли, и если да, то как, произведения (всюду $n \in \mathbb{N}$): **а)** $\prod(1 - (c/n))$ **б)** $\prod(1 + (c/n))$ **в)** $\prod(1 - (c/n^2))$ **г)** $\prod(1 + (c/n^2))$

M$35\frac{1}{2}\diamond$7. Докажите, что $\dfrac{\sin(\pi x)}{n\,\sin(\pi x/n)} = \prod\limits_{\nu=1}^{\frac{n-1}{2}} \left(1 - \dfrac{\sin^2(\pi x/n)}{\sin^2(\pi\nu/n)}\right)$ для нечётных n, и вычислите пределы обеих частей этого равенства при нечётном $n \to \infty$.

M$35\frac{1}{2}\diamond$8 (Эйлеровы разложения). Докажите, что в следующих далее равенствах правые части абсолютно сходятся к левым при любом $x \in \mathbb{R}$, где они определены:

а) $\sin(\pi x) = \pi x \prod\limits_{n\geqslant1}\left(1 - \dfrac{x^2}{n^2}\right)$ **б)** $\operatorname{ctg}(\pi x) = \dfrac{1}{\pi x} - \dfrac{2}{\pi^2}\sum\limits_{n\geqslant1}\dfrac{x}{n^2 - x^2}$

в) $\operatorname{sh}(\pi x) = \pi x \prod\limits_{n\geqslant1}\left(1 + \dfrac{x^2}{n^2}\right)$ **г)** $\operatorname{cth}(\pi x) = \dfrac{1}{\pi x} + \dfrac{2}{\pi^2}\sum\limits_{n\geqslant1}\dfrac{x}{n^2 + x^2}$

M$35\frac{1}{2}\diamond$9 (ζ-функция Римана). Докажите, что ряд $\zeta(s) \overset{\text{def}}{=} \sum\limits_{n\geqslant1} n^{-s}$ абсолютно сходится при всех действительных $s > 1$.

M$35\frac{1}{2}\diamond$10 (числа Бернулли – 3). Определим *числа Бернулли* b_k, как коэффициенты формального степенного ряда $x(1 - e^x)^{-1} \overset{\text{def}}{=} \sum b_k x^k/(k!)$. Верно ли, что числа Бернулли с чётными номерами составляют знакопеременную последовательность? Вычислите первые 5 из них, а также все числа с нечётными номерами.

M$35\frac{1}{2}\diamond$11 (теорема Эйлера). Докажите, что $2\zeta(n) = (-1)^{1+\frac{n}{2}}\dfrac{(2\pi)^n}{n!}\,b_n$ при чётных $n \in \mathbb{N}$.

Квадратичная взаимность

Соглашение: всюду в этом листке через p и q обозначаются натуральные *простые* числа.

M$35\frac{2}{3}$◇1°. Справедливо ли в $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ тождество $(x+y)^p = x^p + y^p$?

M$35\frac{2}{3}$◇2°. Чему равно произведение всех ненулевых чисел в $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$?

M$35\frac{2}{3}$◇3°. Сколько решений может иметь в $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ уравнение $x^2 = a$, с произвольным $a \neq 0$ и сколько в $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ квадратов?

M$35\frac{2}{3}$◇4. Всегда ли в $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ разрешимо уравнение $x^2 + y^2 = 1$?

M$35\frac{2}{3}$◇5. Какие значения может принимать функция $y = x^{(p-1)/2}$ в $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ на множестве
а) всех ненулевых элементов **б)** всех квадратов **в)** всех не квадратов

M$35\frac{2}{3}$◇6 (лемма Гаусса). Выпишем все элементы поля $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ подряд в виде:

$$-(p-1)/2\,,\ \ldots\,,\ -1\,,\ 0\,,\ 1\,,\ \ldots\,,\ (p-1)/2\,.$$

Как связаны чётность числа тех положительных чисел этой записи, которые которые становятся отрицательными от умножения на данное $a \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, со свойством числа $a \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ быть квадратом в $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$?

M$35\frac{2}{3}$◇7. Верно ли, что -1 квадрат в $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ тогда и только тогда, когда $p \equiv 1 \pmod 4$ или $p = 2$?

M$35\frac{2}{3}$◇8. Верно ли, что 2 квадрат в $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ тогда и только тогда, когда $(p^2-1)/8$ чётно?

Символ Лежандра - Якоби. Сопоставим каждому $n \in \mathbb{Z}$ число

$$\left(\frac{n}{p}\right) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 0\,, \text{ если } n \text{ делится на } p\,, \\ 1\,, \text{ если } n \pmod p \text{ ненулевой квадрат в } \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\,, \\ -1\,, \text{ если } n \pmod p \text{ не квадрат в } \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\,. \end{cases}$$

M$35\frac{2}{3}$◇9. Докажите, что при фиксированном p символ $\left(\frac{n}{p}\right)$ мультипликативен в том смысле, что $\left(\frac{mn}{p}\right) = \left(\frac{m}{p}\right) \cdot \left(\frac{n}{p}\right)$ для любых взаимно простых m, n

M$35\frac{2}{3}$◇10. Вычислите $\displaystyle\sum_{n=1}^{p-1} \left(\frac{n}{p}\right)$.

M$35\frac{2}{3}$◇11. Как связан знак $\left(\frac{m}{p}\right)$ со знаком произведения $\displaystyle\prod_{j=1}^{(p-1)/2} \frac{\sin\left(m \cdot 2\pi j/p\right)}{\sin\left(2\pi j/p\right)}$?

M$35\frac{2}{3}$◇12* (golden Satz Гаусса[1]). Докажите, что для любых простых чисел p, q выполняется равенство[2] $\left(\frac{p}{q}\right) \cdot \left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}\frac{q-1}{2}}$.

M$35\frac{2}{3}$◇13. Найдите $\left(\frac{57}{43}\right)$.

M$35\frac{2}{3}$◇14. Является ли 2001 квадратом по модулю **а)** 2 **б)** 43 **в)** 57 **г)** 91

[1]эта теорема также известна как *квадратичный закон взаимности*

[2]подсказка: примените зад. M$35\frac{2}{3}$◇11, разложив все отношения синусов по формулам из зад. M$35\frac{1}{2}$◇3

Последовательности функций

Равномерная и поточечная сходимость. Рассмотрим последовательность функций $f_n(x)$, заданных на одном и том же множестве $X \subset \mathbb{R}$. Функция $X \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ называется *поточечным* пределом последовательности f_n, если $\forall x \in X \quad f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ (обозначение: $f_n \to f$ при $n \to \infty$). Иначе говоря, f_n поточечно сходятся к f, если $\forall\, \varepsilon > 0$ и $\forall\, x \in X\ \exists N \in \mathbb{N} : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\ \forall\, n > N$. Это N, вообще говоря, зависит как от погрешности ε, так и от точки x. Если зависимость от точки x отсутствует, то сходимость называется *равномерной* (обозначение: $f_n \rightrightarrows f$ при $n \to \infty$). Иначе говоря, f_n равномерно сходятся к f, если $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\ \forall\, n > N$ сразу для всех $x \in X$.

М36◇1. Постройте поточечно, но не равномерно сходящуюся к $f(x) \equiv 0$ последовательность
а) каких-нибудь функций на $[\,0\,,\,1\,]$ **б)** непрерывных функций на $(\,0\,,\,1\,)$

М36◇2. Сходится ли (и если да, то как и к чему) на $[\,0\,,\,1\,]$ последовательности функций:
а) $f_n(x) = x^{1/n}$ **б)** $f_n(x) = x^n$ **в)** $f_n(x) = (1 + x^n)/(1 + x^{2n})$ **г)** $g_n(x) = (1 + x^{2n-1})/(1 + x^{2n})$

М36◇3. Пусть последовательности f_n и g_n равномерно сходятся на всём $\mathbb{R}$. Будет ли равномерно сходиться **а)** $f_n + g_n$? **б)** $f_n \cdot g_n$? **в)** $1/f_n$, если $\forall\, x, n\ f_n(x) \neq 0$?

М36◇4. Обязан ли быть поточечный предел последовательности
а) многочленов степени $\leqslant d$ многочленом степени $\leqslant d$?
б) непрерывных на $[a, b]$ функций непрерывной на $[a, b]$ функцией?

М36◇5 (лемма о равномерной непрерывности). Докажите, что если функция f непрерывна на $[a, b]$, то $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta : |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$ сразу для всех пар x_1, x_2 с $|x_1 - x_2| < \delta$.

М36◇6. Пусть последовательность функций f_n поточечно сходится к функции f на $[a, b]$. Обязана ли эта сходимость быть равномерной, если
а) все f_n и f непрерывны и $f_{n+1}(x) \geqslant f_n(x)$ всюду на $[a, b]$
б) то же, но без условия, что f непрерывна
в) все f_n непрерывны и монотонно неубывают всюду на $[a, b]$.
г) $\forall x\ f_n(x)$ монотонно неубывают по n и $\forall n\ f_n(x)$ монотонно неубывает по x

М36◇7. Докажите, что равномерный предел непрерывных на отрезке функций тоже непрерывен на этом отрезке.

М36◇8 (Ступенчатые функции). Функция $[a, b] \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ называется *ступенчатой*, если существует разбиение $a = a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_{n-1} < a_n = b$ отрезка $[a, b]$, такое что f постоянна на каждом из интервалов (a_{i-1}, a_i). Верно ли, что всякая **а)** неубывающая **б)** непрерывная функция на $[a, b]$ является равномерным пределом подходящей последовательности ступенчатых функций?

М36◇9. Может ли равномерный предел последовательности ступенчатых функций
а) быть неограниченной функцией **б)** иметь бесконечно много разрывов

М36◇10* (лейбницева пила – 2). Разобьём $[\,0\,,\,1\,]$ на 2^n равных частей и обозначим через f_n неотрицательную непрерывную на $[\,0\,,\,1\,]$ функцию, график которой над каждым отрезочком разбиения образован боковыми сторонами правильного треугольника с этим отрезочком в качестве основания. Докажите, что существует $s(x) = \lim\limits_{n\to\infty} (f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x))$. Равномерен ли этот предел? Будет ли $s(x)$ непрерывна? Диффернцируема ли $s(x)$ хоть где-нибудь?

М36◇11*. Существует ли равномерно сходящаяся последовательность всюду дифференцируемых на $[\,0\,,\,1\,]$ функций, предел которой дифференцируем на $[\,0\,,\,1\,]$ **а)** не всюду **б)** нигде.

Замыкание, «продолжение по непрерывности» и пополнение

М$36\frac{1}{2}\diamond$1 (замыкание). Докажите, что для любого подмножества X в произвольном метрическом пространстве $\mathscr{M}$ найдется единственное замкнутое подмножество $\overline{X} \supset X$, содержащееся в любом другом замкнутом подмножестве $Z \supset X$. Годится ли в качестве $\overline{X}$ множество всех предельных точек X?

М$36\frac{1}{2}\diamond$2. Существует ли на на квадрате $Q \subset \mathbb{R}^2$ разрывная в центре Q функция $Q \longrightarrow \mathbb{R}$ с непрерывным ограничением на любую прямую, которая

а) вертикальна или горизонтальна **б)** проходит через центр Q

М$36\frac{1}{2}\diamond$3. Существует ли на открытом круге $D \subset \mathbb{R}^2$ непрерывная функция $D \subset \mathbb{R}^2$, которую нельзя продолжить до непрерывной функции $\overline{D} \longrightarrow \mathbb{R}^2$?

М$36\frac{1}{2}\diamond$4. Зафиксируем точку p метричкского пространства $\mathscr{M}$ с расстоянием ϱ. Будет ли функция $x \longmapsto \varrho(p, x)$ всюду на $\mathscr{M}$ **а)** непрерывной **б)** равномерно непрерывной[1] ?

М$36\frac{1}{2}\diamond$5 (изометрии). Отображение метрических пространств $\mathscr{M}_1 \xrightarrow{f} \mathscr{M}_2$ называется *изометрическим*, если $\varrho_1(x,y) = \varrho_2(f(x), f(y))\ \ \forall\, x, y \in \mathscr{M}_1$ (ϱ_i обозначает расстояние в $\mathscr{M}_i$). Всякая ли изометрия **а)** непрерывна? **б)** равномерно непрерывна? **в)** является вложением?

М$36\frac{1}{2}\diamond$6. Пусть на подмножестве $X \subset \mathscr{M}$ задано равномерно непрерывное отображение в полное метрическое пространство $\mathscr{N}$. Всегда ли оно продолжается по непрерывности на $\overline{X}$? Единственно ли такое продолжение? Обязано ли оно быть равномерно непрерывным?

Определение пополнения. Изометрическое вложение $\mathscr{M} \xhookrightarrow{c} \overline{\mathscr{M}}$ метрического пространства $\mathscr{M}$ в *полное* метрическое пространство $\overline{\mathscr{M}}$ называется *пополнением*, если любое изометрическое отображение $\mathscr{M} \xrightarrow{f} \mathscr{N}$ в полное метрическое пространство $\mathscr{N}$ единственным образом продолжается до изометрического отображения $\overline{\mathscr{M}} \xrightarrow{\overline{f}} \mathscr{N}$.

М$36\frac{1}{2}\diamond$7°. Рассмотрим любые два пополнения $\mathscr{M} \xhookrightarrow{c_1} \overline{\mathscr{M}}_1$ и $\mathscr{M} \xhookrightarrow{c_2} \overline{\mathscr{M}}_2$ метрического пространства $\mathscr{M}$. Выведите из определения пополнения, что *существует единственная* изометрическая биекция $\overline{\mathscr{M}}_1 \xrightarrow{\beta} \overline{\mathscr{M}}_2$, тождественная на $\mathscr{M}$ в том смысле, что $c_2 = \beta \circ c_1$.

М$36\frac{1}{2}\diamond$8°. Пусть изометрическое вложение $\mathscr{M} \xhookrightarrow{f} \mathscr{N}$ в полное метрическое пространство $\mathscr{N}$ таково, что замыкание $\overline{f(\mathscr{M})} = \mathscr{N}$. Является ли f пополнением $\mathscr{M}$?

М$36\frac{1}{2}\diamond$9 (существование и единственность пополнения). Чтобы доказать, что всякое метрическое пространство имеет пополнение, единственное в смысле зад. М$36\frac{1}{2}\diamond$7, назовём две последовательности Коши (a_n) и (b_n) в метрическом пространстве $\mathscr{M}$ *эквивалентными*, если их перемешивание $a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots$ тоже является последовательностью Коши. Проверьте, что **а)** это условие не зависит от способа перемешивания

б) классы эквивалентных последовательностей либо не пересекаются, либо совпадают;

в) $\overline{\varrho}\Big(\,(a_n)\ ,\ (b_n)\,\Big) \stackrel{\text{def}}{=} \lim\limits_{n\to\infty} \varrho(a_n, b_n)$ существует и конечно для любых двух последовательностей Коши (a_n), (b_n) и не меняется при замене каждой из них на эквивалентную;

г) множество $\overline{\mathscr{M}}$ классов эквивалентных последовательностей Коши с расстоянием $\overline{\varrho}$ является полным метрическим пространством;

д) отображение $\mathscr{M} \xhookrightarrow{x \mapsto \{x, x, x, \ldots\}} \overline{\mathscr{M}}$ является пополнением $\mathscr{M}$.

М$36\frac{1}{2}\diamond$10. Докажите, что любое равномерно непрерывное отображение $\mathscr{M}_1 \xrightarrow{f} \mathscr{M}_2$ единственным способом продолжается до непрерывного отображения между пополнениями. Всегда ли это продолжение равномерно непрерывно?

---

[1] $\mathscr{M}_1 \xrightarrow{f} \mathscr{M}_2$ *равномерно непрерывно*, если $\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta\ :\ \big(\varrho_1(\,x\,,\,y\,) < \delta\,\big) \Rightarrow \big(\varrho_2(\,f(x)\,,\,f(y)\,) < \delta\,\big)$

Примеры пополнений

М$36\frac{2}{3}\diamond$1 (степенные ряды). Составляют ли многочлены метрическое пространство относительно расстояния $\varrho(f,g) = e^{-\deg(f-g)}$ (мы полагаем $\deg 0 = -\infty$ и $\deg c = 0$ для любой константы $c \neq 0$), и если да, то как устроено его пополнение?

М$36\frac{2}{3}\diamond$2 (p-адическое расстояние). Для любого простого числа $p \in \mathbb{N}$ определим *p-адическую норму* несократимой дроби $q = p^k a/b \in \mathbb{Q}$, у которой p, a, b попарно взаимно просты, $k, a \in \mathbb{Z}$ и $b \in \mathbb{N}$, равенством $|q|_p \stackrel{\text{def}}{=} p^{-k}$ и положим $|0|_p \stackrel{\text{def}}{=} 0$. Докажите, что p-адическая норма обладает свойствами: **а) (мультипликативность)** $|qr|_p = |q|_p|r|_p$
б) (неархимедовость) $|q+r|_p \leqslant \max(|q|_p, |r|_p)$ с обязательным равенством при $|q|_p \neq |r|_p$

М$36\frac{2}{3}\diamond$3. Проверьте, что $\mathbb{Q}$ является неполным метрическим пространством относительно *p-адического расстояния* $\varrho_p(q,r) \stackrel{\text{def}}{=} |q-r|_p$.

М$36\frac{2}{3}\diamond$4 (p-адические числа). Пополнение $\mathbb{Q}_p$ поля $\mathbb{Q}$ по p-адическому расстоянию называется *полем p-адических чисел*, а его подмножество $\mathbb{Z}_p = \{z \in \mathbb{Q}_p \ : \ |z|_p \leqslant 1\}$ называется кольцом *целых* p-адических чисел. Докажите, что:

а) почленное сложение, умножение, вычитание и деление последовательностей Коши корректно определяет на $\mathbb{Q}_p$ операции, удовлетворяющие аксиомам поля;

б) $\mathbb{Z}_p \subset \mathbb{Q}_p$ является кольцом и совпадает с замыканием $\mathbb{Z}$ в $\mathbb{Q}_p$;

в) $\mathbb{Q}_p$ иначе описывается как поле степенных рядов $\sum a_\nu p^\nu$, начинающихся с произвольной (возможно, отрицательной) целой степени[1], с коэффициентами в конечном поле вычетов $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = \{0,\,1,\,\dots,(p-1)\}$; вложение $\mathbb{N} \hookrightarrow \mathbb{Q}_p$ сопоставляет числу $m \in \mathbb{N}$ его p-ичную запись $m = m_0 + m_1 p + \cdots + m_k p^k$, где $0 \leqslant m_i \leqslant (p-1)$, и продолжается до вложения $\mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{Q}_p$ посредством вычитания и деления;

г) опишите в терминах рядов образы $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Z}_p$ в $\mathbb{Q}_p$ (ср. с описанием $\mathbb{Q}$ в $\mathbb{R}$ на языке БДД).

М$36\frac{2}{3}\diamond$5. Целы ли $1/6$ и $1/7$, и извлекаются ли $\sqrt{5}$ и $\sqrt{7}$ в полях **а)** $\mathbb{Q}_2$, **б)** $\mathbb{Q}_3$, **в)** $\mathbb{Q}_5$?

М$36\frac{2}{3}\diamond$6* (лемма Гензеля). Пусть $F(x) \in \mathbb{Z}[x]$ и $a_0 \in \mathbb{Z}$ таковы, что $F(a_0)$ делится на p, а $F'(a_0)$ нет. Постройте последовательность целых чисел $a_1, a_2, a_3, \dots$, так чтобы $a_k \equiv a_{k-1} \pmod{p^k}$, $0 \leqslant a_k < p^{k+1}$ и $F(a_k) \equiv 0 \pmod{p^{k+1}}$, и докажите, что $\exists$ единственное $\alpha \in \mathbb{Z}_p$, такое что $F(\alpha) = 0$ и $\alpha \equiv a_0 \pmod p$. Верно ли то же самое для $F \in \mathbb{Z}_p[x]$ и $a_0 \in \mathbb{Z}_p$?

М$36\frac{2}{3}\diamond$7*. Докажите, что $\mathbb{Z}_p$ гомеморфно[2] канторову множеству (и в частности, компактно, в том смысле, что любое его открытое покрытие содержит конечное подпокрытие).

М$36\frac{2}{3}\diamond$8 (измеримые множества). Назовём два подмножества $X, Y \subset \mathbb{R}$ эквивалентными, если $\mu^*(X \vartriangle Y) = 0$. Верно ли, что

а) классы эквивалентности двух открытых множеств или не пересекаются или совпадают

б) множество $\mathscr{M}$ классов эквивалентных открытых множеств является метрическим пространством с расстоянием $\varrho(U_1, U_2) = \mu^*(U_1 \vartriangle U_2)$

в) его пополнение $\overline{\mathscr{M}}$ состоит из классов измеримых множеств

г) функция $\mathscr{M} \xrightarrow{U \mapsto \mu(U)} \mathbb{R}$ равномерно непрерывна и ее продолжение на $\overline{\mathscr{M}}$ задаёт меру на измеримых множествах

[1] сложение, вычитание и умножение таких рядов определяется обычным образом, а ряд обратный к формальному ряду $p^n(a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \cdots)$, где $n \in \mathbb{Z}$ и $a_0 \neq 0$, определяется как $p^{-n}(a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \cdots)^{-1}$ (пользуемся тем, что ряд с ненулевым свободным членом и коэффициентами в поле можно обернуть); обратите внимание, что все эти ряды *абсолютно сходятся* в $\mathbb{Q}_p$!

[2] *гомеоморфизмом* называется взаимно однозначное и непрерывное в обе стороны отображение

Интеграл по ориентированному отрезку

Интеграл $\boldsymbol{\int\limits_a^b f(x)\,dx}$ — это «ориентированная площадь, ограниченная графиком функции $f(x)$ над ориентированным отрезком $[a, b]$ », где «ориентированность» означает, во-первых, что при $a < b$ та часть графика, где $f(x) > 0$, учитывается с плюсом, а та часть, где $f(x) < 0$, учитывается с минусом, а во-вторых, — что $\int\limits_a^b f(x)\,dx = -\int\limits_b^a f(x)\,dx$, т. е. при проходе отрезка справа налево у всего интеграла следует сменить знак. Придать точный смысл словам « площадь, ограниченная графиком функции » можно *не для всех* функций. В этом листке мы сделаем это только для некоторого класса *хороших* функций. Начнём с того, что интеграл от константы — это площадь соответствующего прямоугольника, а интеграл от ступенчатой функции — это сумма площадей прямоугольников, т. е. если $a = a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_{n-1} < a_n = b$, и ступенчатая функция $[a, b] \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ принимает на (a_{i-1}, a_i) постоянное значение $c_i \in \mathbb{R}$, то $\int\limits_a^b f(x)\,dx \overset{\text{def}}{=} \sum\limits_{i=1}^{n} (a_i - a_{i-1}) \cdot c_i$ (разумеется, надо проверять, что он не зависит от выбора точек a_i, таких что $f = \text{const}$ на (a_{i-1}, a_i)). Функцию $[a, b] \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ назовём *хорошей*, если существует последовательность ступенчатых функций $\varphi_n(x) \rightrightarrows f(x)$ (согласно зад. М36◇8 все монотонные и все непрерывные функции являются хорошими). Для хорошей функции положим $\int\limits_a^b f(x)\,dx \overset{\text{def}}{=} \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_a^b \varphi_n(x)\,dx$ (разумеется, надо проверять, что предел существует и зависит только от f, но не от выбора последовательности $\varphi_n \rightrightarrows f$). Наконец, при $a > b$ положим, по определению, $\int\limits_a^b f(x)\,dx = -\int\limits_b^a f(x)\,dx$.

М37◇1°. Докажите следующие свойства интегралов от ступенчатых функций:

а) $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ не зависит от выбора разбиения, на котором f ступенчата

б) $\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^c f(x)\,dx + \int\limits_c^b f(x)\,dx \quad \forall\, c \in [a, b]$

в) если $\forall\, x \in [a, b] \quad |f(x)| \leqslant \lambda$, где $\lambda \in \mathbb{R}$, то $\left|\int\limits_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \lambda\,|b - a|$

г) если $f(x) \leqslant g(x) \quad \forall\, x \in [a, b]$, то $\int\limits_a^b f(x)\,dx \leqslant \int\limits_a^b g(x)\,dx$

д) $\int\limits_a^b \Big(\lambda f(x) + \mu g(x)\Big)\,dx = \lambda \int\limits_a^b f(x)\,dx + \mu \int\limits_a^b g(x)\,dx \;\forall\; \lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

М37◇2°. Пусть $f(x)$ — хорошая функция. Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_a^b \varphi_n(x)\,dx$ существует для любой последовательности ступенчатых функций $\varphi_n(x)$, равномерно сходящейся к $f(x)$, и его значение не зависит от выбора последовательности $\varphi_n(x)$.

М37◇3°. Убедитесь, что любая ступенчатая функция хорошая, — так что мы имеем два поразному определённых интеграла от неё, — равны ли их значения?

М37◇4. Какие свойства зад. М37◇1 остаются справедливыми для любых хороших функций?

М37◇5. Пусть $f_n \rightrightarrows f$ на отрезке $[a, b]$, и все f_n — хорошие функции. Верно ли, что

а) f тоже хорошая? **б)** если f хорошая, то $\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_a^b f_n(x)\,dx$?

М37◇6. Вычислите: **а)** $\int\limits_0^1 x\,dx$ **б)** $\int\limits_0^1 x^2\,dx$ **в*)** $\int\limits_0^1 x^n\,dx$ **г*)** $\int\limits_0^1 e^x\,dx$.

Измеримые функции и интеграл Лебега

Простые и измеримые функции. В этом листке мы будем рассматривать функции, определённые *почти всюду* на фиксированном отрезке $[a,b]$. Слова «почти всюду» означают «всюду на $[a,b]$, за исключением, разве что, некоторого подмножества меры нуль». Две функции называются *эквивалентными* (обозначение: $f \sim g$), если они почти всюду совпадают. Мы будем писать $f_n(x) \dashrightarrow f(x)$, если последовательность функций f_n почти всюду *поточечно* сходится к функции f. Функция $[a,b] \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ называется *измеримой*, если $\forall\, c \in \mathbb{R}$ подмножество $\{x \in [a,b] \mid f(x) \leqslant c\}$ измеримо. Функция $[a,b] \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ называется *простой*, если отрезок $[a,b]$ можно разбить в дизъюнктное объединение счётного числа измеримых множеств M_i так, что f будет постоянна на каждом множестве M_i положительной меры.

M$37\frac{1}{2}$◇1. Пусть $f_n \dashrightarrow f$ и $g_n \sim f_n$. Будут ли $g_n \dashrightarrow f$?

M$37\frac{1}{2}$◇2. Пусть $f \sim g$. Верно ли, что **а)** f измерима $\Rightarrow$ g измерима? **б)** f проста $\Rightarrow$ g проста?

M$37\frac{1}{2}$◇3. Можно ли в определении измеримой функции заменить $\leqslant$ на **а)** $\geqslant$ **б)** $<$ **в)** $>$ **г)** $=$?

M$37\frac{1}{2}$◇4. Измеримы ли функции, которые почти всюду **а)** непрерывны **б)** монотонны?

M$37\frac{1}{2}$◇5. Пусть $\mathbb{R}^n \xrightarrow{F} \mathbb{R}$ непрерывна, а $g_1, g_2, \dots, g_n : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ измеримы. Докажите, что $F\left(g_1(x), g_2(x), \dots g_n(x)\right)$ измерима на $[a,b]$. Всегда ли измеримы суммы, разности, произведения и модули измеримых функций?

M$37\frac{1}{2}$◇6*. Постройте неизмеримую функцию вида $g(f(x))$ с непрерывной f и измеримой g.

M$37\frac{1}{2}$◇7. Измерим ли предел почти везде сходящейся последовательности измеримых функций?

M$37\frac{1}{2}$◇8. Пусть f измерима и почти всюду ограничена. Постройте последовательность простых функций $\varphi_n \dashrightarrow f$?

M$37\frac{1}{2}$◇9* (теорема Егорова). Если $f_n \dashrightarrow f$, то $\forall\, \varepsilon > 0$ существует подмножество $E \subset [a,b]$ с $\mu^*(E) < \varepsilon$, такое что на дополнении к нему $f_n \rightrightarrows f$.

Суммируемые простые функции. Простая функция φ, принимающая значение c_i на измеримом множестве M_i называется *суммируемой*, если *абсолютно сходится* ряд $\int\limits_a^b \varphi(x)\,dx \stackrel{\text{def}}{=} \sum\limits_i \varphi(c_i)\cdot\mu(M_i)$.

M$37\frac{1}{2}$◇10. Изменяется ли интеграл от замены простой функции на эквивалентную?

M$37\frac{1}{2}$◇11. Обладают ли интегралы простых суммируемых функций свойствами из зад. M37◇1?

M$37\frac{1}{2}$◇12. Докажите, что классы эквивалентных простых суммируемых функций составляют метрическое пространство $\mathscr{S}([a,b])$ относительно расстояния $\varrho(\varphi,\psi) \stackrel{\text{def}}{=} \int\limits_a^b |\varphi(x)-\psi(x)|\,dx$.

M$37\frac{1}{2}$◇13 (интеграл Лебега). Произвольная функция f называется *суммируемой* на $[a,b]$, если в $\mathscr{S}([a,b])$ существует последовательность Коши $\varphi_n \dashrightarrow f$. Докажите, что тогда существует конечный $\int\limits_a^b f(x)\,dx \stackrel{\text{def}}{=} \lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_a^b \varphi_n(x)\,dx$, не зависящий от выбора последовательности φ_n.

M$37\frac{1}{2}$◇14. Докажите, что любая почти всюду ограниченная измеримая функция суммируема.

M$37\frac{1}{2}$◇15. Обладает ли интеграл Лебега свойствами из зад. M37◇1?

M$37\frac{1}{2}$◇16* (лемма Фату). Пусть последовательность неотрицательных суммируемых функций $f_n \dashrightarrow f$ и все $\int\limits_a^b f_n(x)\,dx \leqslant C$. Докажите, что f тоже суммируема и $\int\limits_a^b f(x)\,dx \leqslant C$.

M$37\frac{1}{2}$◇17*. Докажите, что пространство $\mathscr{L}_1([a,b])$ классов суммируемых на $[a,b]$ функций с расстоянием $\varrho(f,g) \stackrel{\text{def}}{=} \int\limits_a^b |f(x)-g(x)|\,dx$ является пополнением $\mathscr{S}([a,b])$.

Вычисление интегралов

М38◇1. Пусть f является хорошей функцией на отрезке, содержащем точки a, b, c. Докажите, что при любом взаимном расположении этих точек $\int\limits_a^c f(x)\,dx = \int\limits_a^b f(x)\,dx + \int\limits_b^c f(x)\,dx$.

М38◇2. Пусть f является хорошей функцией на $[a,b]$. Будет ли функция $F(t) = \int\limits_a^t f(x)\,dx$ всюду на $[a,b]$ **а)** непрерывна? **б)** дифференцируема?

М38◇3. Пусть в условиях зад. М38◇2 функция f непрерывна в точке $x_0 \in [a,b]$. Докажите, что тогда F дифференцируема в x_0 и найдите $F'(x_0)$.

М38◇4 (формула Ньютона - Лейбница). $\int\limits_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a) \quad \forall\, f \in \mathscr{C}^1([a,b])$ (докажите).

М38◇5 (интегрирование по частям). Верно ли, что $\forall\, f, g \in \mathscr{C}^1([a,b])$ имеет место равенство $\int\limits_a^b f'(x)g(x)\,dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int\limits_a^b f(x)g'(x)\,dx$

М38◇6 (теорема о среднем). Пусть f непрерывна на $[a,b]$. Существует ли $\xi \in [a,b]$, такое что $\int\limits_a^b f(x)\,dx = f(\xi)\cdot(b-a)$?

М38◇7. Вычислите: **а)** $\int\limits_{-2}^{3}(x^3+x+1)\,dx$ **б)** $\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos(x/3)\,dx$ **в)** $\int\limits_{1/2}^{8}\log_2 x\,dx$ **г)** $\int\limits_0^1 \arcsin x\,dx$

д) $\displaystyle\int\limits_{-3}^{1}\frac{3x-1}{2x-5}\,dx$ **е)** $\int\limits_0^1\sqrt{3x+1}\,dx$ **ж)** $\displaystyle\int\limits_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$ **з)** $\int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4}\operatorname{tg}^2 x\,dx$ **и)** $\displaystyle\int\limits_{-1/2}^{1/2}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\,dx$

М38◇8* (интегральная формула Тейлора). Для любой функции $f \in \mathscr{C}^{n+1}([a,b])$ и произвольного $x \in [a,b]$ докажите равенство $f(x) = f(a) + \displaystyle\sum_{\nu=1}^{n}\frac{f^{(\nu)}(a)}{\nu!}(x-a)^\nu + \frac{1}{n!}\int\limits_a^x (x-t)^n f^{(n)}(t)\,dt$.

Несобственные интегралы. Пусть функция f определена на $[a,b)$ (допускается значение $b=+\infty$) и является хорошей на любом отрезке $[a,t]\subset[a,b)$. Если существует $\lim\limits_{t\nearrow b}\int\limits_a^t f(x)\,dx$, то он называется *несобственным интегралом* от f по полуинтервалу $[a,b)$ и обозначается $\int\limits_a^b f(x)\,dx$. Если предела не существует, то говорят, что несобственный интеграл *расходится*. Аналогично определяется несобственные интегралы по полуинтервалам $(a,b]$.

М38◇9. При каких $\alpha\in\mathbb{R}^{>0}$ сходится (и чему в этом случае равен) **а)** $\int\limits_0^1 x^{-\alpha}\,dx$ **б)** $\int\limits_1^{+\infty} x^{-\alpha}\,dx$.

М38◇10. Вычислите или докажите расходимость: **а)** $\int\limits_0^{+\infty}e^{-x}\,dx$ **б)** $\int\limits_0^{+\infty}x^n e^{-x}\,dx$ **в)** $\int\limits_0^1 x\ln x\,dx$

г) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}$ **д)** $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty}\frac{\ln x\,dx}{x}$ **е)** $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty}\frac{\ln x\,dx}{x^\alpha}$, где $\alpha>1$ **ж)** $\int\limits_0^{\pi/2}\operatorname{tg} x\,dx$ **з*)** $\int\limits_0^{\pi/2}\sqrt{\operatorname{tg} x}\,dx$

М38◇11. Равносильна ли сходимость несобственного интеграла $\int\limits_1^{+\infty} f(x)\,dx$ сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ **а)** если f неотрицательна и монотонна **б)** в общем случае.

Примеры длин и площадей

M39◇1. Вычислите площадь ограниченной фигуры, заключённой между кривыми:

а) $x + y = 2$ и $x^2 = y$ **б)** $x = y$ и $y = x + \sin^2 x$ **в)** $x = 0$, $y = 2$ и $y = 2^x$ **г*)** $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

M39◇2. Какова площадь под графиком $\sin^2 x$ над любым отрезком длины $\pi k/2$ ($k \in \mathbb{N}$)?

M39◇3. Найдите $\displaystyle\int \sqrt{1 - x^2}dx$ и явным интегрированием получите формулу, выражающую площадь сегмента единичного круга через: **а)** высоту сегмента **б)** длину дуги

M39◇4°. Пусть точка P_t движется против часовой стрелки по единичной окружности $x^2+y^2 = 1$ так, что в момент времени $t = 0$ она находится в точке $P_0 = (1, 0)$ и при всех $-\pi \leqslant t \leqslant \pi$ площадь кругового сектора P_0OP_t равна $2|t|$. Выразите через t абсциссу и ординату точки P_t, а также ординату точки пересечения луча $[OP_t)$ с прямой $x = 1$.

Гиперболические функции. Пусть точка P_t движется снизу вверх по правой ветви «единичной гиперболы» $x^2 - y^2 = 1$ так, что в момент времени $t = 0$ она находится в точке $P_0 = (1, 0)$ и при всех $-\infty < t < +\infty$ площадь гиперболического сектора P_0OP_t равна $2|t|$. В этом случае абсцисса и ордината точки P_t называются *гиперболическим косинусом* и *гиперболическим синусом*, а ордината точки пересечения луча $[OP_t)$ с прямой $x = 1$ называется *гиперболическим тангенсом* числа t. Обозначения: $\operatorname{ch} t$, $\operatorname{sh} t$ и $\operatorname{th} t$. Отношение $\operatorname{cth} t \overset{\text{def}}{=} \operatorname{ch} t/\operatorname{sh} t$ называется *гиперболическим котангенсом*.

M39◇5. Найдите $\displaystyle\int \sqrt{x^2 - 1}\,dx$, явно вычислите площадь гиперболического сектора и выразите гиперболические функции через экспоненты $e^{\pm t}$ (обязательно сделайте проверку выполнения «основного гиперболического тождества» $\operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t = 1$).

M39◇6°. Выразите $\operatorname{th} t$ через $\operatorname{sh} t$, $\operatorname{ch} t$ и выведите гиперболические тождества для:

а) приведения отрицательных аргументов (т. е. для $\operatorname{sh}(-t)$, $\operatorname{ch}(-t)$, $\operatorname{th}(-t)$ и $\operatorname{cth}(-t)$)

б) универсальной гиперболической подстановки (рациональная параметризация гиперболы «тангенсом половинного угла»).

в) двойного аргумента (т. е. для $\operatorname{sh}(2t)$, $\operatorname{ch}(2t)$, $\operatorname{th}(2t)$ и $\operatorname{cth}(2t)$)

г) сложения аргументов (т. е. для $\operatorname{sh}(t_1 + t_2)$, $\operatorname{ch}(t_1 + t_2)$, $\operatorname{th}(t_1 + t_2)$ и $\operatorname{cth}(t_1 + t_2)$)

M39◇7. Каковы графики гиперболических функций, их производные и первообразные?

Длина дуги. Будем называть *гладкой параметризованной кривой* любое отображение $[a, b] \xrightarrow{\gamma} \mathbb{R}^2$, заданное в координатах парой непрерывно дифференцируемых функций $x = \gamma_1(t)$, $y = \gamma_2(t)$, таких что *вектор скорости* $v(t) \overset{\text{def}}{=} (\gamma_1'(t), \gamma_2'(t))$ не равен нулю ни при каком $a \leqslant t \leqslant b$. Интеграл $\int_a^b |v(t)|\,dt$ называется *длиной* этой кривой.

M39◇8. Изменится ли длина кривой при замене параметризации γ на композицию $\gamma\circ\vartheta$ с произвольной монотонно возрастающей непрерывно дифференцируемой взаимно однозначной функцией $[c, d] \xrightarrow{\vartheta} [a, b]$? Что будет, если «возрастающая» заменить на «убывающая»?

M39◇9. Вычислите длину дуги кривой: **а)** $y = e^x$, где $0 \leqslant x \leqslant 1$ **б)** $y = \ln\cos x$, где $0 \leqslant x \leqslant \pi/4$ **в)** $y = 2x^2$, где $0 \leqslant y \leqslant 3$ **г)** $y = \operatorname{ch} x$, где $0 \leqslant x \leqslant 1$ **д)** $x = \operatorname{ch}^3 t$, $y = \operatorname{sh}^3 t$, где $0 \leqslant t \leqslant 1$

M39◇10. Как относятся:

а) площадь петли кривой $y^2 = x\,(x - 1)^2$ к площади изопериметричного ей круга?

б*) периметр эллипса с полуосями $a > b$ к длине волны синусоиды $y = \sqrt{a^2 - b^2}\,\sin(x/b)$?

Решение некоторых дифференциальных уравнений

Дифференциальное уравнение k-того порядка на неизвестную функцию $y = y(x)$ переменной x — это соотношение вида $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(k)}) = 0$, в которое входит x, y и первые k производных $y', y'', \dots, y^{(k)}$ от y по x. Его *решением* называется всякая функция $y = f(x)$, при подстановке которой в F вместо y получается тождественно нулевая функция от x.

M40◇1. Пусть $c = \mathrm{const}$, дифференцируемые функции $y = f(x)$, $y = g(x)$ являются решениями уравнения $y' = cy$ на некотором интервале и $g(x) \neq 0$ на этом интервале. Чему может быть равно отношение $f(x)/g(x)$?

M40◇2. Найдите все решения дифференциального уравнения $y' = cy$ на любом интервале.

M40◇3. Найдите все функции $(0,1) \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, такие что $f' = -2f$ всюду на $(0,1)$ и $f(1/2) = 1$.

M40◇4. Пусть на некотором интервале ненулевая функция $y = y(x)$ удовлетворяет уравнению $y' - cy = 0$, а функция $z = z(x)$ — уравнению $z' - cz = h(x)$, где $c = \mathrm{const}$, а $h(x)$ — данная функция. Выразите z/y через c и h и найдите все решения обоих уравнений.

M40◇5. Найдите все решения уравнений: **а)** $y' - 2y = x$ **б)** $y' + y = e^{2x}$ **в)** $y' + 3y = \cos(2x)$

M40◇6°. Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ — это все корни многочлена $\lambda^k + a_{k-1}\lambda^{k-1} + \dots + a_1\lambda + a_0$. Верно ли, что $y^{(k)} + a_{k-1}y^{(k-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = \left(\frac{d}{dx} - \lambda_1\right)\left(\frac{d}{dx} - \lambda_2\right)\cdots\left(\frac{d}{dx} - \lambda_k\right) y\,$?

M40◇7. Найдите все решения уравнений: **а)** $y'' = y$ **б)** $y'' - y' = 2y$ **в)** $y'' + y = 2y'$.

M40◇8. Выделите в предыдущей задаче те решения, которые удовлетворяют условиям:
а) $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ **б)** $y(-1) = y(1) = 1$

Комплекснозначные функции. Любая функция $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{C}$ однозначно записывается в виде $f(x) = u(x) + iv(x)$, где $u, v : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ суть вещественнозначные функции, называемые *вещественной* и *мнимой* частями f. Положим, по определению, $f' = u' + iv'$ и $\int f\,dx = \int u\,dx + i\int v\,dx$.

M40◇9. Найдите вещественную и мнимую части функций $z = e^{(2+3i)x}$ и $z = e^{(2-3i)x}$.

M40◇10. Докажите, что комплекснозначная функция тогда и только тогда удовлетворяет дифференциальному уравнению вида $y^{(k)} + a_{k-1}y^{(k-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0$ с постоянными $a_\nu \in \mathbb{R}$, когда её вещественная и мнимая части удовлетворяют этому уравнению.

M40◇11. Найдите все комплекснозначные функции $z = z(x)$, удовлетворяющие уравнениям (константа $\lambda \in \mathbb{C}$ и комплекснозначная функция $h(x)$ заданы):
а) $z' - \lambda z = 0$ **б)** $z' - \lambda z = h(x)$

M40◇12. Найдите все вещественные решения дифференциального уравнения $y'' = -y$.

M40◇13. Найдите все вещественные решения дифференциального уравнения $y'' = -2y$, удовлетворяющие условиям: **а)** $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$ **б)** $y(0) = 1$, $y(\pi) = 0$.

M40◇14*. Найдите все вещественные решения дифференциального уравнения $y'' + y = e^{4x}$ с $y(0) = 4$, $y'(0) = -3$.

M40◇15 (разделённые переменные). Докажите, что дифференцируемая функция y тогда и только тогда удовлетворяет дифференциальному уравнению $h(y)y' = g(x)$ с заданными непрерывными функциями $h(y)$, $g(x)$, когда при некотором постоянном c она удовлетворяет обычному (не дифференциальному) уравнению $H(y) = G(x) + c$, в котором H и G суть какие-либо первообразные от h и g.

M40◇16. Найдите все решения дифференциальных уравнений:
а) $(x+1)y' = xy$ **б)** $y' = y \sin x$ **в)** $yy' + x = 1$

M40◇17. Найдите все решения дифференциального уравнения $y' \operatorname{ctg} x + y = 2$ с $y(0) = -1$.

Теорема существования решения обыкновенного дифференциального уравнения

Постановка задачи. На плоскости XOY заданы: прямоугольник

$$\Pi = \{\,(x,y) \mid a \leqslant x \leqslant b,\ c \leqslant y \leqslant d\,\}\ ,$$

точка (x_0, y_0), лежащая строго внутри него, и дифференциальное уравнение $y' = F(x,y)$, правая часть которого $\Pi \xrightarrow{F} \mathbb{R}$ является непрерывной функцией на Π. Мы докажем, что существует ε-окрестность U_ε точки x_0 и дифференцируемая функция $U_\varepsilon \xrightarrow{f} [c,d]$, такие что $f'(x) = F(x, f(x)) \quad \forall x \in U_\varepsilon$ и $f(x_0) = y_0$.

M$40\frac{1}{2}$◇1. Зададимся некоторой ε-окрестностью U_ε точки x_0 и рассмотрим следующие два множества дифференцируемых функций $U_\varepsilon \xrightarrow{\varphi} [c,d]$, заданных на этой окрестности:

$$\mathscr{F}^{\uparrow} \stackrel{\text{def}}{=} \{\,\varphi \mid \ \forall x \in U_\varepsilon \ \ \varphi'(x) > F(x, \varphi(x))\,\}$$
$$\mathscr{F}_{\downarrow} \stackrel{\text{def}}{=} \{\,\varphi \mid \ \forall x \in U_\varepsilon \ \ \varphi'(x) < F(x, \varphi(x))\,\}$$

Докажите, что $\exists\, \varepsilon$: оба множества $\mathscr{F}^{\uparrow}, \mathscr{F}_{\downarrow}$ непусты, и справа от x_0 график любой функции из $\mathscr{F}^{\uparrow}$ лежит выше графика любой функции из $\mathscr{F}_{\downarrow}$, а слева — наоборот.

M$40\frac{1}{2}$◇2. Определим функцию $f(x)$ справа от x как $\inf\limits_{\varphi \in \mathscr{F}^{\uparrow}} \varphi(x)$, а слева от x как $\sup\limits_{\varphi \in \mathscr{F}^{\uparrow}} \varphi(x)$.

Докажите, что f существует, непрерывна, дифференцируема и удовлетворяет уравнению $y' = F(x,y)$.

Обозначения. Пусть $C = \sup\limits_{\Pi} |F(x,y)|$. Обозначим через D_δ отрезок $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$, где δ выбрано так, чтобы «бабочка» $B_\delta \stackrel{\text{def}}{=} \{\,(x,y) \mid x \in D_\delta, |y - y_0| \leqslant C|x - x_0|\}$ лежала целиком внутри Π. Обозначим через $\mathscr{M}_\delta$ множество всех непрерывных функций $D_\delta \xrightarrow{\varphi} [c,d]$, график которых содержится в B_d.

M$40\frac{1}{2}$◇3. Докажите, что $\mathscr{M}_\delta$ является полным метрическим пространством с расстоянием $\varrho(\varphi, \psi) = \sup\limits_{x \in D_\delta} |\varphi(x) - \psi(x)|$.

M$40\frac{1}{2}$◇4 (лемма Асколи - Арцела). Дано некоторое множество $\mathscr{F}$ непрерывных функций на отрезке. Докажите, что любая ограниченная последовательность функций из $\mathscr{F}$ содержит поточечно сходящуюся подпоследовательность[1] тогда и только тогда, когда все функции в $\mathscr{F}$ ограничены общей константой и *в равной степени* непрерывны (т. е. $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0$: $|x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| < \varepsilon$ сразу для всех $\varphi \in \mathscr{F}$).

M$40\frac{1}{2}$◇5 (ломаные Эйлера). Разобъём D_δ на $2n$ равных частей длины $h = \delta/n$ и определим непрерывную функцию $\varphi_n(x)$, полагая $\varphi(x_0) = y_0$, и далее продолжая её влево и вправо индуктивным правилом: над отрезком $[x_0 + kh, x_0 + (k+1)h]$ (где $k = 0, 1, 2, \dots$) и над отрезком $[x_0 + (k-1)h, x_0 + kh]$ (где $k = 0, -1, -2, \dots$) $\varphi(x)$ есть прямая с угловым коэффициентом $F(x_0 + kh, \varphi(x_0 + kh))$ (значение $\varphi(x_0 + kh)$ определено по индуктивному предположению). Докажите, что все φ_n лежат в $\mathscr{M}_\delta$ и из них можно выбрать подпоследовательность, имеющую поточечный предел, также лежащий в $\mathscr{M}_\delta$.

M$40\frac{1}{2}$◇6. Явно опишите последовательность ломаных Эйлера для уравнения $y' = y$ с начальным условием $y(0) = 1$ и шагом $h = 1/n$, и честно найдите её предел при $n \to \infty$.

M$40\frac{1}{2}$◇7. Докажите, что поточечный предел любой сходящейся последовательности ломаных Эйлера из зад. M$40\frac{1}{2}$◇5 является дифференцируемой функцией, удовлетворяющий уравнению $y' = F(x,y)$ (мы ещё вернёмся к этой задаче в следующем листке).

[1] предел которой не обязан принадлежать $\mathscr{F}$

Теорема единственности решения обыкновенного дифференциального уравнения

М$40\frac{2}{3}\diamond$1. Найдите все решения уравнения $y' = y^{2/3}$ и укажите два различных решения, удовлетворяющие начальному условию $y(0) = 0$.

Постановка задачи. Всюду в этом листке константа C, прямоугольник Π, «бабочка» $B_\delta \subset \Pi$, отрезок $D_\delta \ni x_0$ и пространство $\mathscr{M}_\delta$ непрерывных функций на D_δ с графиками внутри B_δ будут те же самые, что и в предыдущем листке. Мы докажем, что если правая часть дифференциального уравнения $y' = F(x, y)$ удовлетворяет дополнительному условию:

$$\exists\, L \in \mathbb{R} : |F(x, y_1) - F(x, y_2)| < L \cdot |y_1 - y_2| \qquad \forall\, x \in [a, b] \ \ \&\ \forall\, y_1, y_2 \in [c, d] \tag{1}$$

то любые два решения дифференциального уравнения $y' = F(x, y)$, графики которых проходят через точку (x_0, y_0) совпадают над некоторой δ-окрестностью точки x_0.

М$40\frac{2}{3}\diamond$2 (приближения Пикара). Будем строить последовательные приближения $\psi_k(x) \in \mathscr{M}_\delta$ (с $k = 0, 1, 2, \ldots$) к решению уравнения $y' = F(x, y)$, взяв $\psi_0(x) \equiv y_0$ и подбирая в качестве ψ_{k+1} такую дифференцируюмую функцию, производная от которой равна значениям функции F на графике предыдущего приближения ψ_k, т. е. удовлетворяющую при $x \in D_\delta$ уравнению $\psi'_{k+1}(x) = F(x, \psi_k(x))$ и такую, что $\psi_{k+1}(x_0) = y_0$. Докажите, что $\psi_{k+1}(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} F(t, \psi_k(t))\, dt$ и проверьте, что все $\psi_k \in \mathscr{M}_\delta$.

М$40\frac{2}{3}\diamond$3. Явно вычислите все приближения Пикара для уравнения $y' = y$ с начальным условием $y(0) = 1$ и честно найдите их предел.

М$40\frac{2}{3}\diamond$4. Пусть функция F удовлетворяет условию (1). Докажите, что при достаточно малом δ правило $P : \psi(x) \longmapsto P\psi(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} F(t, \psi(t))\, dt$ определяет сжимающее отображение $\mathscr{M}_\delta \xrightarrow{P} \mathscr{M}_\delta$.

М$40\frac{2}{3}\diamond$5. Докажите, что функция $\psi \in \mathscr{M}_\delta$ тогда и только тогда является решением уравнения $y' = F(x, y)$, когда $P\psi = \psi$.

М$40\frac{2}{3}\diamond$6. Докажите сформулированную в начале листка теорему единственности. Как она уживается с примером из зад. М$40\frac{2}{3}\diamond$1?

М$40\frac{2}{3}\diamond$7. Пусть отображение $\mathscr{M} \xrightarrow{P} \mathscr{M}$ (в произвольном метрическом пространстве) является сжимающим с константой $0 < \lambda < 1$ (т. е. $\varrho(P\varphi, P\psi) \leqslant \lambda\varrho(\varphi, \psi)\ \forall\ \varphi, \psi \in \mathscr{M}$). Докажите, что расстояние от произвольной точки $\psi \in \mathscr{M}$ до неподвижной точки ψ_0 отображения P удовлетворяет неравенству $\varrho(\psi, \psi_0) \leqslant \dfrac{\varrho(\psi, P\psi)}{1 - \lambda}$.

М$40\frac{2}{3}\diamond$8. Докажите, что если функция F удовлетворяет условию (1), то *вся* последовательность ломаных Эйлера из зад. М$40\frac{1}{2}\diamond$5 *равномерно* (т. е. по метрике $\mathscr{M}_\delta$, а не поточечно) сходится к решению уравнения $y' = F(x, y)$.

М$40\frac{2}{3}\diamond$9* (теорема о непрерывной зависимости от начальных условий). Пусть функция F удовлетворяет условию (1). Докажите, что у точки (x_0, y_0) существует окрестность $\widetilde{\Pi} \subset \Pi$, такая что при некотором фиксированном $\delta > 0$ и произвольных $(\widetilde{x}_0, \widetilde{y}_0) \in \widetilde{\Pi}$ уравнение $y' = F(x, y)$ будет обладать единственным решением $y = f(x)$, определённым всюду на D_δ и удовлетворяющим начальному условию $f(\widetilde{x}_0) = \widetilde{y}_0$, и более того, сопоставление точке $(\widetilde{x}_0, \widetilde{y}_0) \in \widetilde{\Pi}$ такого решения будет непрерывным отображением из $\widetilde{\Pi}$ в пространство непрерывных функций на D_δ.

Дифференциальное исчисление

Напоминание. Дифференциал функции $f(x)$ в точке x_0 — это линейная функция от $(x - x_0)$, приближающая $f(x) - f(x_0)$ с погрешностью, которая при $x \to x_0$ стремится к нулю быстрее, чем $(x - x_0)$. Дифференциал обычно обозначают $df|_{x=x_0}$ или просто df. Будучи линейной функцией от $x - x_0$, дифференциал имеет вид $c(x_0) \cdot (x - x_0)$, где $c(x_0)$ — постоянный коэффициент (свой для каждой точки x_0). Поэтому часто пишут $df|_{x=x_0} = c(x_0)\,dx$, ибо $dx|_{x=x_0} = (x - x_0)\ \forall\, x_0$. Опыт показывает, что найти линейную часть приращения неизвестной функции проще, чем саму функцию, так что при отыскании функций, описывающих те или иные явления природы, обычно сначала находят соотношения на их дифференциалы, а потом уже — при помощи интегрирования — сами функции.

M41◇1. Прирост численности недавно обнаруженных жутких космических зубастиков пропорционален числу всевозможных их пар. По данным голливудской обсерватории, за прошедший год поголовье зубастиков удвоилось. Как скоро их станет бесконечно много? Смогли бы они бесконечно размножиться за конечное время, кабы их прирост был пропорционален их численности?

M41◇2. Скорость радиоактивного распада пропорциональна имеющемуся количеству активного вещества; через какое время распадётся $3/4$ вещества с периодом полураспада 1 год?

M41◇3. За какое время вытечет вся вода из полного **а)** вертикального **б)** горизонтального цилиндрического бака $\varnothing\, 1{,}8\,$*м* длиной $2{,}45\,$*м* через круглую $\varnothing\, 6\,$*см* дырку в дне?

M41◇4. С какой силой должен тянуть теплоход за канат, делающий 3 оборота вокруг причального столба диаметра $40\,$*см* (коэффициент трения $1/3$), чтобы его не смог удержать причальный рабочий, тянущий за другой конец каната с силой $10\,$*кг*?

M41◇5. На десятиградусном морозе чашка кипятку за полчаса остыла до $20°$. В какой момент её температура была $40°$?

M41◇6 (формула Циолковского). Какой скорости достигнет ракета массы m после отработки всего топлива массы M? Скорость истечения топлива v, никаких внешних сил нет.

M41◇7 (объём тела вращения). Функция f неотрицательна и непрерывно дифференцируема на $[0, a)$. Обозначим через $V(t)$ объём тела, заметаемого областью $0 \leqslant x \leqslant t$, $0 \leqslant y \leqslant f(x)$ при её вращении вокруг оси OX. Вычислите дифференциал $dV|_{t=x}$ и найдите $V(t)$.

Указание. Сравните приращение объёма в точке x с объёмом цилиндра радиуса $f(x)$.

M41◇8 (площадь поверхности тела вращения). В условиях зад. M41◇7 обозначим через $S(t)$ площадь боковой поверхности того же самого тела вращения. Вычислите дифференциал $dS|_{t=x}$ и найдите $S(t)$.

Указание. Сравните приращение площади с площадью боковой поверхности соприкасающегося конуса (а площадь последней легко подсчитать развернув её на плоскости).

M41◇9. Выразите через радиусы оснований и высоту объём и площадь поверхности усечённого прямого кругового: **а)** конуса **б)** параболойда **в)** гиперболойда.

M41◇10. Выразите объём и площадь поверхности шара через радиус.

M41◇11. Конечны ли: **а)** объём **б)** площадь поверхности фигуры $x^2 \geqslant y^2 + z^2$, $x \geqslant 1$?

M41◇12 (теорема Архимеда). Вычислите площадь поверхности пояса сферы, заключенного между двумя параллельными плоскостями, и убедитесь, что он зависит лишь от расстояния между плоскостями, но не от расстояния от них до центра сферы.

M41◇13* (плоскость Лобачевского). Из оптики известно, что синус угла, образуемого лучом света с нормалью к границе, разделяющей разные среды, обратно пропорционален показателям преломления этих сред: $n_1 \sin\alpha_1 = n_2 \sin\alpha_2$, где n_1, n_2 — показатели преломления, а α_1, α_2 — соответствующие углы. Найдите траектории световых лучей в верхней полуплоскости $x \geqslant 0$ с показателем преломления $n(x, y) = 1/y$.

Проективные пространства.

n*-мерное вещественное *проективное пространство $\mathbb{RP}_n$ — это множество всех проходящих через начало координат прямых в $(n+1)$-мерном вещественном координатном пространстве $\mathbb{R}^{(n+1)}$. По определению, каждая такая прямая задаётся *направляющим вектором* $\overrightarrow{v} = (v_0, v_1, \ldots, v_n) \neq \overrightarrow{0}$ и состоит из всех точек $x \in \mathbb{R}^{(n+1)}$ вида $(t \cdot v_0, t \cdot v_1, \ldots, t \cdot v_n) = t \cdot \overrightarrow{v}$ с произвольными $t \in \mathbb{R}$. Таким образом, можно сказать, что точки $\mathbb{RP}_n$ суть ненулевые векторы из $\mathbb{R}^{(n+1)}$, рассматриваемые с точностью до пропорциональности. Чтобы наблюдать их в виде настоящих точек, надо разместить в $\mathbb{R}^{(n+1)}$ экран — любую n-мерную аффинную плоскость, не проходящую через нуль (см. рис. 42 - 1). Такие гиперплоскости называются *аффинными картами* на $\mathbb{RP}_n$. Всякая прямая, непараллельная аффинной карте, изобразится на этой карте обычной точкой, в которой карта пересекает рассматриваемую прямую. Никакая аффинная карта не покрывает $\mathbb{RP}_n$ целиком — все параллельные данной карте прямые (а они, очевидно, образуют проективное пространство $\mathbb{RP}_{n-1} \subset \mathbb{P}_n$) будут непокрыты. Этот непокрытый кусок называется *бесконечно удалённой* (относительно данной карты) проективной плоскостью. В результате, как множество, $\mathbb{RP}_n$ разбивается в дизъюнктное[1] объединение пространств:

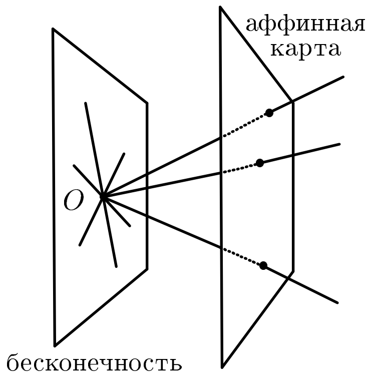


Рис. 42 - 1. Аффинная карта и бесконечно удалённое проективное подпространство.

$$\mathbb{P}_n = \mathbb{R}^n \sqcup \mathbb{P}_{n-1} = \mathbb{R}^n \sqcup \mathbb{R}^{n-1} \sqcup \mathbb{P}_{n-2} = \mathbb{R}^n \sqcup \mathbb{R}^{n-1} \sqcup \ldots \sqcup \mathbb{R}^0$$

в котором последнее $\mathbb{R}^0 = \mathbb{P}_0$ – это одна точка. На $\mathbb{RP}_n$ имеется естественная топология, в которой открытыми (соотв. замкнутыми) множествами являются множества, пересечение которые открытых с произвольной аффинной картой открыто (соотв. замкнуто) в этой карте.

М42◇1. Убедитесь, что $\mathbb{RP}_1$ гомеоморфна[2] окружности.

М42◇2. Лента Мёбиуса известным образом склеивается из прямоугольника. Опишите как склеить из прямоугольника $\mathbb{RP}_2$ (этот рецепт нельзя будет реализовать в $\mathbb{R}^3$ без самопересечений прямоугольника самого с собой, но сам рецепт существует и вполне определяет получающееся в результате топологическон пространство).

М42◇3. Граница ленты Мёбиуса гомеоморфна окружности. Верно ли, что если заклеить эту окружность диском, то получится $\mathbb{RP}_2$?

М42◇4. Являются ли аффинные карты открытыми подмножествами в $\mathbb{RP}_n$?

М42◇5*. Являются ли проективные пространства компактами (в том смысле, что они удовлетворяют условию Больцано - Вейерштрасса и/или из любого их покрытия открытыми множествами можно выбрать конечное подпокрытие)?

М42◇6*. Укажите на $\mathbb{RP}^2$ гладкую петлю $\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{RP}_2$, $\gamma(0) = \gamma(1)$, которая сама не может быть непрерывно стянута внутри $\mathbb{RP}_2$ в точку, но будучи пройденной дважды, становилась бы стягиваемой.

М42◇7*. Установите гомеоморфизм между $\mathbb{RP}_3$ и пространством SO_3, состоящем, по определению, из всевозможных поворотов $\mathbb{R}_3$ вокруг всевозможных осей, проходящих через начало координат[3] (заодно опишите топологию на SO_3).

[1] т. е. составленное их непересекающихся множеств

[2] гомеоморфизмом топологических пространств называется непрерывная в обе стороны биекция между ними, т. е. такая биекция при которой образ и прообраз любого открытого множества открыт

[3] на самом деле (трудная) *теорема Эйлера* утверждает, что SO_3 исчерпывает всю совокупность сохраняющих начало координат и ориентацию движений пространства $\mathbb{R}^3$

События и вероятности

Конфигурационные пространства. Математическая модель любого явления *реальной* жизни начинается с разделения явления на «элементарные составляющие», которые изображаются точками некоторого пространства, называемого в теории вероятностей *пространством элементарных событий*, в физике — *конфигурационным пространством*, а в геометрии — *пространством модулей* явления. Например: результат бросания игральной кости удобно изображать точкой в 6-элементном множестве $\{1,2,3,4,5,6\}$; расположение двух поездов на трассе Москва – Санкт-Петербург — точкой квадрата (координаты точки — расстояния от поездов до Москвы); вращения $\mathbb{R}^3$, оставляющие на месте начало координат, изображаются точками пространства $\mathbb{RP}_3$.

М43◇1. Из пункта A в пункт B идут 2 дороги, причём 2 машины, связанные 10-метровой верёвкой могут проехать из A в B, двигаясь каждая по своей дороге. Смогут ли разъехаться 2 идущих по разным дорогам навстречу другу воза сена шестиметровых радиусов?

М43◇2. В течение часа к железнодорожной станции в случайные моменты времени подходят 2 поезда. Какова вероятность того, что удастся перебежать из поезда в поезд не ожидая на платформе, если оба стоят по 5 минут?

М43◇3*. Каждая из 7 одинаковых банок на 9/10 заполнена краской одного из 7 неповторяющихся цветов радуги. Можно ли, переливая краску из банки в банку и равномерно перемешивая содержимое, получить в одной из банок колер, в котором все 7 цветов смешаны в равной пропорции? (Утешительная версия: 2, 3 или 4 банки, заполненные на 4/5.)

Вероятности. Математическая теория вероятностей имеет дело с конфигурационным пространством Ω, на котором задана *мера*, сопоставляющая некоторым подмножествам $A \subset \Omega$ (называемым *событиями*), число $\mathsf{P}(A) \in [0,1]$, называемое *вероятностью* A и измеряющее долю элементарных исходов, составляющих A, среди всех элементарных исходов Ω. Таковой мерой может служить, например, число взятых с некоторыми весами элементов в A, или отношение площади A к площади Ω. Требуется, чтобы $\mathsf{P}(\Omega) = 1$, $\mathsf{P}(A_1 \cup A_2) = \mathsf{P}(A_1) + \mathsf{P}(A_2)$, если $A_1 \cap A_2 = \varnothing$, и чтобы измеримость A и B влекла за собой измеримость $A \cap B$, $A \cup B$ и $A \setminus B$.

М43◇4. Какова вероятность того, что при 3 бросаниях игральной кости выпадет
а) 3 шестёрки **б)** хоть одна шестёрка **в)** ни одной шестёрки **г)** чётная сумма очков.

М43◇5. Из 54-карточной колоды ($13 \times 4 + 2$ джокера[1]) вытаскивают 5 карт. Какова вероятность того, что среди них окажется **а)** 5 карт одной масти и идущих подряд достоинств
б) то же, но, возможно, разной масти **в)** ровно 4 карты одинакового достоинства
г) 5 карт одинаковой масти **д)** ровно 2 пары карт одинаковых достоинства
е) тройка и двойка карт одинакового достоинства **ж)** 5 карт одинакового достоинства

М43◇6. При каком минимальном числе учеников в классе совпадающие дни рождения будут с вероятностью $> 1/2$?

М43◇7. Пусть A и B — два события, и $A \cap B$ — их одновременное наступление. Обозначим через $\mathsf{P}(A|B)$ вероятность наступления A, при условии, что имеет место B (т. е. долю $A \cap B$ внутри B). Верно ли, что $\mathsf{P}(A|B)\mathsf{P}(B) = \mathsf{P}(A \cap B) = \mathsf{P}(B|A)\mathsf{P}(A)$?

М43◇8. На вступительном экзамене профессор Дубарев опрашивает половину всех абитуриентов, равновероятно ставя 2, 3 и 4. Доцент Пеньков опрашивает треть абитуриентов и ставит половине из них 2, а остальным — поровну 4 и 5. Остальные абитуриенты попадают к ассистенту Добренькому, который четверти из них ставит троечку, а прочим — пятёрки. Какова вероятность сдать экзамен: **а)** на 2? **б)** на 3? **в)** не более, чем на 4?

М43◇9. Какова вероятность того, что не получивший 5 абитуриент имел дело:
а) с Добреньким? **б)** с Дубаревым? **в)** с Пеньковым?

[1] карта, номинал и масть которой игрок может выбрать по своему желанию

Вычисление вероятностей

M44◇1. Палку случайным образом ломают на 3 части. Какова вероятность того, что из этих частей можно сложить треугольник?

M44◇2 (задача Бюффона). На плоскость, разлинованную параллельными прямыми, находящимися на расстоянии a друг от друга, случайно брошена игла длиной $\lambda < a$. Найдите вероятность пересечения иглы с какой-нибудь прямой.

M44◇3. Абсолютно неупругую монету радиуса r и толщины d бросают на абсолютно неупругую горизонтальную поверхность. Какова вероятность того, что монета упадет на ребро?

M44◇4. В урне m черных и n белых шаров. Какова вероятность того, что из μ наугад вынутых из урны шаров будет ровно ν белых, при условии, что каждый вынутый шар
а) сразу же возвращают **б)** больше не возвращают обратно в урну?

M44◇5. Борясь с ростом населения, но уважая традиции, китайцы, если первый ребёнок в семье — мальчик, больше не позволяют этой семье иметь детей; если же первый ребёнок — девочка, семье разрешают завести еще ровно одного ребёнка. Какое отношение численностей мужчин и женщин при этом установится, если рождения мальчика и девочки равновероятны?

M44◇6. Ведущий телеигры предлагает участнику угадать, за какой из трёх закрытых дверей находится автомобиль. Тот наугад выбрал одну из дверей, после чего ведущий открыл ту из двух оставшихся дверей, где точно нет автомобиля, и предложил игроку вновь сделать, теперь уже окончательный, выбор между двумя закрытыми дверями. Как быть?

M44◇7. Как при помощи одной монеты бросить жребий на троих?

M44◇8 (вред подхалимства). Жюри из трех человек выносит решение большинством голосов. Председатель и второй член жюри принимают правильные решения независимо с вероятностями $0,7$ и $0,9$, а третий — бросает монету. Как изменится вероятность выноса жюри правильного решения, если третий станет копировать решения председателя?

M44◇9. На экзаменационном столе лежат 30 разных билетов, студенты по очереди берут их, и взятые белеты на стол не возвращаются. Каким в очереди Вам выгоднее всего быть, если Вы знаете ровно 3 билета из 30?

Стохастическая зависимость. События A и B называются *независимыми*, если $\mathsf{P}(A \cap B) = \mathsf{P}(A)\mathsf{P}(B)$ (при $\mathsf{P}(B) \neq 0$ это равносильно равенству $\mathsf{P}(A|B) = \mathsf{P}(A)$, а при $\mathsf{P}(A) \neq 0$ — равенству $\mathsf{P}(B|A) = \mathsf{P}(B)$). Подчеркнём, что речь идёт о *стохастической*, а не о *причинно-следственной* зависимости.

M44◇10. Предполагая, что мальчики и девочки родятся независимо и равновероятно, выясните, зависимы ли события: «в семье не более одной девочки» и «в семье есть дети обоих полов»
а) в семьях с двумя **б)** в семьях с тремя **в)** в семьях с четырьмя детьми.

M44◇11*. A, B, C попарно независимы. Верно ли, что $\mathsf{P}(A \cap B \cap C) = \mathsf{P}(A)\mathsf{P}(B)\mathsf{P}(C)$? А если все попарные и тройное пересечения имеют ненулевую вероятность?

M44◇12*. Датчик выдаёт числа из какого-то конечного набора, каждое — со своей определенной вероятностью. Скажем, что один датчик больше другого, если с вероятностью $> 1/2$ он выдаёт большее число. Есть ли датчики A, B и C, такие что $A > B > C > A$?

M44◇13* (синица и журавль). Вам в случайном порядке показывают 100 заранее неизвестных попарно разных денежных сумм, пока Вы не заберёте показываемую Вам сумму. Сможете ли Вы забрать максимальную с вероятностью $> 1/3$?

M44◇14*. У n пассажиров n-местного самолета посадочные таллоны на разные места. Первой входит сумасшедшая старушка и садится куда попало. Каждый следующий входящий занимает своё место, если оно свободно, иначе тоже садился куда попало. Сколь вероятно, что последний сядет на свое место?

Серии независимых испытаний

М45◇1. Двое бросают монету — один 10 раз, другой — 11. Какова вероятность того, что у второго орлов выпало больше, чем у первого?

Случайные величины. Числовые функции на пространстве элементарных событий Ω называются *случайными величинами*. Пусть Ω состоит из не более чем счётного множества занумерованных точек, которым приписаны вероятности $p_1, p_2, p_3, \ldots$ Если случайная величина ξ принимает в i-той точке значение ξ_i, то сумма $\mathsf{M}[\xi] \stackrel{\text{def}}{=} \sum\limits_i \xi_i p_i$ называется *средним значением* или *математическим ожиданием* ξ. Среднее значение случайной величины $(\xi - \mathsf{M}[\xi])^2$ называется *дисперсией* ξ и обозначается $\mathsf{D}[\xi]$.

М45◇2. Найдите среднее значение и дисперсию суммы выпавших очков при 3 подбрасываниях игральной кости.

М45◇3. Каждый из двух игроков пишет на бумажке число 1 или 2, потом бумажки одновременно открывают. Если числа совпали, то первый платит второму написанное на бумажке число рублей, если нет — второй платит первому a рублей. При каком a игра будет честной, в том смысле, что среднй выигрыш обоих играков нулевой?

М45◇4. Человек, имеющий n ключей, хочет отперть свою дверь, независимо пробуя 1 ключ в секунду в случайном порядке. Сколько он в среднем провозится, если неподошедшие ключи
а) исключаюся из связки **б)** продолжают пробоваться?

М45◇5. Вася и Петя попадают мячом в кольцо с вероятностями 0.45 и 0.55. При каком количестве пар бросков Вася имеет наибольшие шансы выигать у Пети?

М45◇6. Найдите матожидание и дисперсию числа гербов при n подбрасываниях монеты.

М45◇7. Справедливы ли для произвольной случайной величины ξ соотношения:
а) $\mathsf{D}[\xi] = \mathsf{M}[\xi^2] - \mathsf{M}^2[\xi]$ **б) (неравенство Чебышева)** $\mathsf{P}\Big(\big|\xi - \mathsf{M}[\xi]\big| \geqslant \alpha\Big) \leqslant \dfrac{\mathsf{D}[\xi]}{\alpha^2} \quad \forall\, \alpha > 0.$

М45◇8*. Банк казино равен миллиону долларов. Игрок бросает монету, пока не выпадет герб. Если это происходит при k-том броске, он получает 2^k долларов, или весь банк, если $2^k \geqslant 10^6$. При какой входной плате такая игра выгодна казино? Что будет, если банк не ограничен?

М45◇9*. Пачка жевачки содержит один из n разных, но равновероятных вкладышей. Сколько пачек нужно в среднем купить, чтобы собрать полную коллекцию вкладышей?

М45◇10 (схема Бернулли). Производится серия из n одинаковых независимых опытов, каждый из которых завершается «успехом» с вероятностью p или «неудачей» с вероятностью $q = 1 - p$. Обозначим через β_n общее число успехов в серии. Найдите: **а)** $\mathsf{P}(\beta_n = k)$ **б)** $\mathsf{M}[\beta_n]$
в) $\mathsf{D}[\beta_n]$ **г) (закон больших чисел)** $\lim\limits_{n\to\infty} \mathsf{P}\left(\left|\dfrac{\beta_n}{n} - p\right| < \varepsilon\right)$ (при произвольном $\varepsilon > 0$).

М45◇11 (закон Пуассона). Пусть в схеме Бернулли $n \to \infty$, и одновременно $p \to 0$ так, что $np \to \lambda > 0$. Для каждого целого $k \geqslant 0$ найдите $\lim\limits_{n\to\infty} \mathsf{P}(\beta_n = k)$.

М45◇12. Вам годится любой из двух трамваев, ходящих со средними интервалами в 10 и в 15 минут. С каким средним интервалом Вы можете уехать?

М45◇13*. На АТС по одному поступают независимые вызовы с постоянной (мгновенной) скоростью λ шт./мин. Каковы вероятности прихода ровно k вызовов за минуту и того, что первого вызова придётся ждать $\leqslant t$ минут? Найдите матожидание и дисперсию
а) числа вызовов приходящих в минуту **б*)** времени ожидания очередного вызова.

М45◇14*. При $2n$ подбрасываниях монеты выпало k гербов. Для произвольно заданной пары чисел $a < b$ сравните $\int\limits_a^b e^{-x^2/2}dx$ с пределом $\lim\limits_{n\to\infty} \mathsf{P}\big(a \cdot \sqrt{n/2} < k - n < b \cdot \sqrt{n/2}\big)$.

ПОДСКАЗКА: $\beta_{n+\nu} \simeq \beta_n e^{-\nu^2/n}$ при $n \gg 0$ и фиксированном ν.

Случайные блуждания

Описание явления. Некая фишка движется по множеству точек с целыми координатами в $\mathbb{R}^n$ раз в секунду случайно изменяя на ±1 значение одной из своих координат (все $2n$ возможных при этом сдвигов считаются равновероятными). Этот процесс при $n = 1, 2, 3, \ldots$ называется *случайным блужданием* по прямой, плоскости, пространству … . При этом *график траектории*, показывающий зависимость положения фишки от времени, представляет собою ломаную линию с вершинами в целых точках $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ (первое $\mathbb{R}$ — это ось времени), все рёбра которой наклонены к оси времени под углом $45°$ и могут поворачивать только на $90°$.

М$45\frac{1}{2}\diamond$1 (принцип отражения). Рассмотрим графики траекторий случайного блуждания *по прямой* (это ломаные на плоскости $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$). Выясните:
- **а)** сколько разных траекторий ведут из $(0,0)$ в (t,x) с $t \geqslant x \geqslant 0$
- **б)** как связаны траектории, не пересекающие ось времени и ведущие из $(0,x)$ в (t,y), где $x,y>0$, с произвольными траекториями, ведущими из $(0,-x)$ в (t,y)
- **в)** сколько не пересекающих ось времени траекторий ведут из $(0,0)$ в (t,x) с $t \geqslant x \geqslant 0$
- **г)** сколько всего имеется выходящих из начала координат и не пересекающих ось времени траекторий над $[0,t]$.

М$45\frac{1}{2}\diamond$2 (задача о лидерстве – 1). В серии подбрасываний монеты выпало a орлов и $b<a$ решек. Какова вероятность того, что орлов было больше на протяжении всей серии?

М$45\frac{1}{2}\diamond$3 (блуждание по прямой). Пусть фишка блуждает по прямой, стартовав в момент $t=0$ из точки $x=0$. Обозначим через u_{2t} и f_{2t} вероятности того, что через $2t$ секунд фишка, соответственно, вернётся и *впервые* вернётся в $x=0$. Докажите, что $u_{2t}=\sum\limits_{k=1}^{t} f_{2k}u_{2t-2k}$ и явно выразите: **а)** f_{2t} через u_{2t} и u_{2t-2} **б)** u_{2t} через t.

М$45\frac{1}{2}\diamond$4 (возвратность и транзитивность). Верно ли, что при случайном блуждании по прямой фишка с вероятностью 1 рано или поздно: **а)** вернётся в стартовое положение?
б) побывает в любой наперёд заданной точке?

М$45\frac{1}{2}\diamond$5. Найдите u_{2t} для блуждания на плоскости и в пространстве.

М$45\frac{1}{2}\diamond$6*. Будет ли возвратным (в смысле зад. М$45\frac{1}{2}\diamond$4 (а)) случайное блуждание
а) на плоскости **б)** в пространстве?

М$45\frac{1}{2}\diamond$7 (задача о разорении). Игрок с капиталом \$$n$ играет, пока не разорится, в орлянку против казино с неограниченным капиталом (за орла он получает \$1, за решку — платит).
- **а)** Найдите вероятность того, что игра продлится ровно m бросаний.
- **б)** Какова вероятность того, что игра никогда не кончится?
- **в*)** Конечна ли средняя продолжительность игры?

М$45\frac{1}{2}\diamond$8 (задача о лидерстве – 2). Монету подбросили $2n$ раз. Докажите, что вероятности того, что в последний раз число орлов сравнялось с числом решек на $2k$-м подбрасывании, и того, что ровно после $2k$ из $2n$ подбрасываний суммарное число выпавших орлов превышало суммарное число решек, равны числу $\alpha_{2k,2n} \overset{\text{def}}{=} u_{2k}u_{2(n-k)}$.

М$45\frac{1}{2}\diamond$9* (закон арксинуса). Докажите, что $\forall\, x\in(0,1)$ вероятность того, что при n подбрасываниях монеты суммарное число орлов превышало суммарное число решек после не более чем xn из этих n подбрасываний, стремится при $n\to\infty$ к $\dfrac{2}{\pi}\arcsin\sqrt{x}$.

ПОДСКАЗКА: покажите, что $u_{2n}\simeq c/\sqrt{n}$ при $n\gg 0$ (где $c=\text{const}$) и, как и в зад. М45$\diamond$14, сравните $\sum\limits_{0\leqslant k\leqslant xn}\alpha_{2k,2n}$ со ступенчатым приближением к $\int\limits_0^x \dfrac{dt}{\sqrt{t(1-t)}}$; причём c тоже можно найти, вычислив интеграл!

Ориентированный объём и линейные уравнения

Ориентированный объём. Ориентированная площадь — это функция $\sigma(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2})$, сопоставляющая паре векторов на плоскости площадь натянутого на них параллелограмма, взятую со знаком «+», если вращение от v_1 к v_2 (в пределах параллелограмма) происходит против часовой стрелки. Ориентированный объём — это функция $\omega(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3})$, сопоставляющая тройке векторов в пространстве объём натянутого на них параллелепипеда, взятый со знаком «+», если вращение от v_1 к v_2 (в пределах натянутой на них грани) происходит против часовой стрелки, если глядеть из конца вектора $\overrightarrow{v_3}$.

М46◇1°. Убедитесь, что функции σ и ω обладают следующими свойствами:

а) $\lambda \cdot \omega(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}) = \omega(\lambda \cdot \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}) = \omega(\overrightarrow{v_1}, \lambda \cdot \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}) = \omega(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \lambda \cdot \overrightarrow{v_3})$ и аналогично для σ;

б) если к любому из аргументов прибавить любой *другой*, умноженный на произвольное число, значение площади и объёма не изменяется;

в) $\omega(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}) = \sigma(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}) = 1$ для стандартных единичных ортогональных базисных векторов.

М46◇2. Верно ли, что любая функция от векторов, обладающая первыми двумя свойствами из предыдущей задачи, обязательно

а) меняет знак при перемене местами любых двух аргументов;

б) обращается в нуль, если какие-то два аргумента совпадают;

в) обращается в нуль, если один из аргументов линейно выражается через другие;

г) линейна по каждому из аргументов, т. е. $\omega(\ldots, \lambda\cdot\overrightarrow{v} + \mu\cdot\overrightarrow{w}, \ldots) = \lambda\cdot\omega(\ldots, \overrightarrow{v}, \ldots) + \mu\cdot\omega(\ldots, \overrightarrow{w}, \ldots)$ (обозначенные многоточиями аргументы фиксированы);

д) однозначно определяется своим значением на любом наборе линейно независимых векторов?

М46◇3. Докажите, что функции σ и ω, обладающие всеми тремя свойствами из зад. М46◇1, существуют и единственны. Напишите их явные выражения через координаты векторов-аргументов в стандартном базисе.

М46◇4. Опишите **а)** на плоскости **б)** в пространстве ГМТ P таких, что скалярное произведение $\overrightarrow{OP}$ с данным фиксированным вектором $\overrightarrow{ON}$ равно данному числу d (тут O — фиксированная точка, скажем, начало координат).

М46◇5. Убедитесь, что любая плоскость в $\mathbb{R}^3$ задаётся уравнением вида $ax + by + cz = d$. Укажите координаты какого-либо вектора, перпендикулярного такой плоскости и найдите расстояние от неё до начала координат.

М46◇6. Даны три вектора $\overrightarrow{v_1} = (a_1, b_1, c_1)$, $\overrightarrow{v_2} = (a_2, b_2, c_2)$ и $\overrightarrow{v_3} = (a_3, b_3, c_3)$. Как соотносятся между собою условия: **а)** $\omega(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}) = 0$; **б)** $\exists \overrightarrow{n} : \overrightarrow{v_1}\cdot\overrightarrow{n} = \overrightarrow{v_2}\cdot\overrightarrow{n} = \overrightarrow{v_3}\cdot\overrightarrow{n} = 0$;

в) $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$, $\overrightarrow{v_3}$ компланарны; **г)** $a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_2b_1c_3 - a_1b_3c_2 - a_3b_2c_1 = 0$;

д) система линейных уравнений $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z = 0 \\ a_3x + b_3y + c_3z = 0 \end{cases}$ имеет решение $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$.

М46◇7. Напишите координаты вектора, перпендикулярного двум произвольно заданным векторам (a_1, b_1, c_1) и (a_2, b_2, c_2).

М46◇8*. Пусть $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ движение, оставляющее на месте начало координат. Докажите, что $F(\lambda\overrightarrow{v} + \mu\overrightarrow{w}) = \lambda F(\overrightarrow{v}) + \mu F(\overrightarrow{w})$ и что уравнение $F(\overrightarrow{v}) = t\cdot\overrightarrow{v}$ на вектор $\overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^3$ имеет при некотором $t \in \mathbb{R}$ ненулевое решение.

М46◇9* (теорема Эйлера). Докажите, что всякое движение $\mathbb{R}^3$ является композицией параллельного переноса, поворота вокруг некоторой прямой и, возможно, центральной симметрии.

Линейность, аффинность и барицентрические координаты.

М47◇1. Астрономы считают, что все галактики разлетаются прямолинейно по направлениям от нашей со скоростями, пропорциональными расстояниям до них. Означает ли это, что наша галактика — центр вселенной?

М47◇2. Крючок безмена заменили на более тяжёлый и одновременно параллельно сдвинули вниз шкалу, так чтобы нуль совпал с новым положением стрелки. Будет ли безмен после этого правильно измерять вес?

Определения. Функция $\mathbb{R}^m \xrightarrow{f} \mathbb{R}^n$ называется *линейной*, если для всех $x \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^n$ и $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ выполняется равенство[1] $f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)$. Функция $\mathbb{R}^m \xrightarrow{g} \mathbb{R}^n$ называется *аффинной*, если существует $a \in \mathbb{R}^m$, такое что функция $x \longmapsto g(x+a) - g(a)$ линейна.

М47◇3°. Какие из функций $f(x) = 2x + 3$, $f(x) = -3x$, $f(x) = x^2$, $f(x_1, x_2) = 2x_1 + 3x_2$, $f(x_1, x_2) = -3(x_1 - x_2)$, $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2 + 1$ **а)** аффинны? **б)** линейны?

М47◇4. Пусть линейная функция $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R}^2$ переводит базисные векторы $e_1 = (1, 0)$ и $e_2 = (0, 1)$ в векторы (a, c) и (b, d) соответственно. Куда она переведёт вектор (x, y)?

М47◇5. Опишите все линейные и все аффинные функции
а) $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^1$ **б)** $\mathbb{R}^1 \longrightarrow \mathbb{R}^n$ **в)** $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ **г*)** $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$

М47◇6. Изменим в определении аффинной функции фразу «существует $a \in \mathbb{R}^m$» на фразу «для любого $a \in \mathbb{R}^m$». Будет ли новое определение эквивалентно исходному?

Центр тяжести точек $P_1, P_2, \ldots, P_s$ с весами $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$ — это такая точка O, что $\sum\limits_{\nu=1}^{s} \lambda_\nu \cdot \overrightarrow{OP_\nu} = \overrightarrow{0}$.

М47◇7 (теорема о центре тяжести). Докажите, что у любого конечного набора точек с произвольными вещественными весами существует единственный центр тяжести.

М47◇8 (теорема о группировании масс). Пусть $P_1, P_2, \ldots, P_s$ и $Q_1, Q_2, \ldots, Q_r$ — два (возможно, пересекающихся) набора точек с весами $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$ и $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_r$, а P_0 и Q_0 — их центры тяжести. Совпадает ли центр тяжести объединения этих двух наборов (у точек, входящих в оба набора, следует сложить их веса) с центром тяжести системы из двух точек P_0 и Q_0, взятых с весами $\lambda_0 = \sum \lambda_\nu$ и $\mu_0 = \sum \mu_\nu$?

М47◇9 (теорема о медианах). Медианой системы точек называется отрезок, соединяющий одну из них с центром тяжести остальных, взятых с весом 1. Верно ли, что все медианы данного набора точек пересекаются в одной точке и делятся ею в одинаковом отношении? Если да, то чему оно равно?

М47◇10 (барицентрические координаты). Дан $\triangle ABC$. Докажите, что $\forall$ точки P $\exists$ единственный набор весов[2] (α, β, γ) с суммой $\alpha + \beta + \gamma = 1$, такой что центр тяжести точек A, B, C, взятых с весами α, β, γ, находится в P. Нарисуйте ГМТ барицентрические координаты которых относительно равностороннего треугольника удовлетворяют соотношению:
а) $\alpha = 0$ **б)** $\alpha + \beta = 0$ **в)** $\alpha + \beta < 0$ **г)** $2\alpha > 3\beta$ **д)** $\alpha \leqslant \beta + \gamma$ **е*)** $\alpha^2 + \beta^2 = \gamma^2$

М47◇11. Рассмотрим на $\mathbb{P}_2$ любую аффинную карту U, на которой видны все три точки X, Y, Z, отвечающие координатным осям в $\mathbb{R}^3$. Пусть $P \in U$ произвольная точка, отвечающая прямой с направляющим вектором $v \in \mathbb{R}^3$. Как связаны декартовы координаты вектора v в $\mathbb{R}^3$ с барицентрическими координатами точки P относительно $\triangle XYZ$ в U?

М47◇12. Верно ли, что функция $\mathbb{R}^m \xrightarrow{g} \mathbb{R}^n$ аффинна тогда и только тогда, когда для любых точек $x_1, x_2, \ldots, x_s$ и любых чисел $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$ с суммой $\sum \lambda_\nu = 1$ выполняется равенство $g\left(\sum\limits_{\nu=1}^{s} \lambda_\nu x_\nu\right) = \sum\limits_{\nu=1}^{s} \lambda_\nu g(x_\nu)$?

---

[1] $\lambda(x_1, x_2, \ldots, x_m) \stackrel{\text{def}}{=} (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_m)$ и $(a_1, a_2, \ldots, a_m) + (b_1, b_2, \ldots, b_m) \stackrel{\text{def}}{=} (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_m + b_m)$

[2] он называется *барицентрическими координатами* точки P относительно $\triangle ABC$

Аффинные координаты на проективном пространстве

Однородные и аффинные координаты. Рассмотрим на $\mathbb{P}_n$ аффинную карту U_α, заданную в $\mathbb{R}^{n+1}$ уравнением $\alpha(x) = 1$, где $\mathbb{R}^{n+1} \xrightarrow{\alpha} \mathbb{R}$ некоторая *линейная* функция[1]. Точка $x \in \mathbb{P}_n$ попадает в U_α, если и только если её однородные координаты $(x_0 : x_1 : \ldots : x_n)$ удовлетворяют условию $\alpha(x_0, x_1, \ldots, x_n) \neq 0$, и изображается в U_α точкой $(y_0, y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ с координатами[2] $y_i = x_i/\alpha(x_0, x_1, \ldots, x_n)$. Для любых n линейных функций $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n : \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}$, составляющих вместе с функцией α линейно независимую систему из $(n+1)$ линейных функций на $\mathbb{R}^n$, набор из n чисел $\xi_i(y)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ называется *аффинными координатами* точки $x \in U_\alpha$ в системе $\{\xi_i\}$. Подчеркнём, что выбор аффинных координат в данной аффинной карте во-первых сильно произволен, а во-вторых зависит от карты — в другой карте U_β линейные функции ξ_i уже могут не сгодиться, а если даже и сгодятся, то координатами точки $(x_0 : x_1 : \ldots : x_n)$ будут уже не $\xi_i(y)$, где $y_\nu = x_\nu/\alpha(x)$, а $\xi_i(z)$, где $z_\nu = x_\nu/b(x)$.

Пример: рассмотрим на $\mathbb{P}_1$ с однородными координатами $(x_0 : x_1)$ карту U_{x_0}, состоящую из всех прямых, пересекающих прямую $x_0 = 1$. Тут $\alpha(x_0, x_1) = x_0$, и в качестве аффинной координаты годится любая функция ξ, непропорциональная x_0, скажем $\xi(x_0, x_1) = x_1$. Тогда, к примеру, точка $P = (5 : 2)$ будет иметь аффинную координату $\xi = 2/5$. В карте U_{x_1}, где $x_1 = 1$, функция ξ не годится в качестве аффинной координаты; там в качестве аффинной координаты подойдёт, скажем, функция $\eta(x_0, x_1) = x_0$, и та же самая точка P получит координату $\eta = 5/2$. А вот линейная функция $\zeta(x_0, x_1) = x_0 + x_1$ годится в качестве аффинной координаты в обеих картах U_{x_0} и U_{x_1}; при этом в первой карте точка P будет иметь координату $\zeta = 1 + 2/5 = 7/5$, а во второй — координату $\zeta = 5/2 + 1 = 7/2$.

М48◇1°. На $\mathbb{P}_2$ с однородными координатами $(t_0 : t_1 : t_2)$ найдите аффинные координаты (x, y) точек $p = (1 : -2 : 3)$, $q = (-2 : 0 : 5)$ и $r = (0 : 4 : -3)$ в карте U_α для всех допустимых сочетаний $\{\alpha, x, y\}$ из списков: $\alpha = t_1$, $\alpha = t_1 + t_2$, $\alpha = t_1 + t_2 + t_3$; $x = t_0$, $x = t_0 - t_2$, $x = t_0 + t_1$; $y = t_2$, $y = t_0 + t_2$, $y = t_1 + t_2 + t_3$.

М48◇2. Рассмотрим на $\mathbb{P}_2$ с однородными координатами $(t_0 : t_1 : t_2)$ фигуру, заданную уравнением $t_0^2 = t_1^2 + t_2^2$. Убедитесь, что это определение корректно (т. е. при замене набора однородных координат на пропорциональный свойство точки принадлежать этой фигуре сохраняется) и нарисуйте, как выглядит эта фигура в аффинных картах: **а)** U_{t_0}, **б)** U_{t_1}, **в)** $U_{t_0 - t_1}$. В каждом из случаев задайте соответствующую фигуру явным уравнением в аффинных координатах (x, y) взяв в качестве таковых $x = t_1$, $y = t_2$ в (а), $x = t_0$, $y = t_2$ в (б), и $x = t_0 + t_1$, $y = t_2$ в (в).

М48◇3. Верно ли, что всякая фигура, заданная в $\mathbb{R}^n$ уравнением $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$, где f — произвольный многочлен степени d, является изображением в аффинной карте U_{x_0} некоторой фигуры, заданной в $\mathbb{P}^n$ уравнением $\widehat{f}(x_0, x_1, \ldots, x_n) = 0$, где $\widehat{f}$ — однородный многочлен степени d, из которого f получатся подстановкой $x_0 = 1$?

М48◇4. Кривая на $\mathbb{P}_2$ с однородными координатами $(t_0 : t_1 : t_2)$ имеет в аффинной карте U_{t_0} аффинное уравнение **а)** $y = x^2$ **б)** $y = x^3$ **в)** $y^2 + (x-1)^2 = 1$ **г)** $y^2 = x^2(x+1)$ (в системе координат $x = t_1$, $y = t_2$). Напишите для неё однородное уравнение и аффинные уравнения в двух других картах U_{t_1}. U_{t_2}. Нарисуйте все эти 12 аффинных кривых.

М48◇5*. Вложим $\mathbb{R}^2$ в комплексную плоскость $\mathbb{C}^2$ (как множество точек с действительными координатами), а $\mathbb{C}^2$ — в комплексную проективную плоскость $\mathbb{CP}_2$ в качестве карты U_{t_0}. Найдите на $\mathbb{CP}_2$ две точки, через которые проходят все кривые, видные в исходном $\mathbb{R}^2$ как окружности. Верно ли, что любая кривая, заданная в $\mathbb{CP}_2$ однородным неприводимым многочленом степени 2 с вещественными коэффициентами, проходящая через найденные Вами 2 точки и имеющая непустое пересечение с исходным $\mathbb{R}^2$, видна в нём как окружность?

[1] отметьте, что любую не содержащую начало координат гиперплоскость $\mathbb{R}^{n+1}$ можно задать таким уравнением
[2] проверьте, что это единственный вектор, пропорциональный x и удовлетворяющий уравнению $\alpha(y) = 1$

Проективные квадрики

Квадрика в $\mathbb{P}_n$ — это ГМТ, однородные координаты $(x_0 : x_1 : \ \ldots : x_n)$ которых удовлетворяют уравнению $f(x_0, x_1, \ldots, x_n) = 0$, где f — однородный многочлен степени 2; плоские квадрики обычно называют *кониками*. Две квадрики называются *геометрически одинаковыми*, если они получаются друг из друга линейной обратимой заменой однородных координат. Квадрики заданные пропорциональными уравнениями просто равны как множества. Поэтому квадрики являются точками проективного пространства $\mathbb{P}_{N(n)}$, где $N(n)+1$ — это число коэффициентов однородного многочлена степени 2 от $n+1$ переменных. Квадрика называется *неприводимой*, если её уравнение — неприводимый многочлен.

M49◇1°. Явно выразите $N(n)$ через n.

M49◇2°. Убедитесь, что приводимая квадрика представляет собой либо объединение двух различных гиперплоскостей, либо одну «двойную» плоскость.

M49◇3 (теорема Лагранжа). Всякий однородный многочлен степени 2 с коэффициентами в любом поле, где $1+1 \neq 0$, можно линейной обратимой заменой координат преобразовать к виду $\sum a_i x_i^2$, причём в поле $\mathbb{R}$ можно ещё и сделать все a_i равными ± 1, а в поле $\mathbb{C}$ — единице.

M49◇4. Опишите все геометрически разные квадрики в $\mathbb{RP}_1$, $\mathbb{RP}_2$, $\mathbb{RP}_3$, $\mathbb{CP}_1$, $\mathbb{CP}_2$ и $\mathbb{CP}_3$.

M49◇5. Верно ли, что через любые 5 точек на $\mathbb{P}_2$ можно провести квадрику? Через сколько точек гарантированно проводится квадрика на $\mathbb{P}_3$?

M49◇6. Докажите, что взаимное расположение квадрики и прямой исчерпывается следующими взаимоисключающими возможностями: квадрика содержит прямую, квадрика пересекает прямую в единственной точке, квадрика пересекает прямую в 2 разных точках, квадрика не пересекает прямую (причём над полем $\mathbb{C}$ последний случай невозмжен).

M49◇7. Верно ли, что любые 3 прямые в $\mathbb{P}_3$ лежат на некоторой квадрике?

M49◇8. Какую фигуру заметяют все прямые, перескающие 3 заданных попарно скрещивющихся прямых в $\mathbb{P}_3$?

M49◇9*. Сколько прямых пересекает 4 данных попарно скрещивающихся прямых в пространстве? Опишите все возможные ответы и укажите, какие из них устойчивы по отношению к «малым шевелениям» данной четвёрки прямых.

M49◇10 (коника Веронезе). Рассмотрим двумерное пространство V всех линейных функций от t_0, t_1, взяв в нём $\{t_0, t_1\}$ за базис (так что координатами функции $f(t_0,t_1) = \alpha_0 t_0 + \alpha_1 t_1$ относительно этого базиса будут числа (α_0, α_1)) и трёхмерное пространство W всех однородных многочленов степени 2 от t_0, t_1, взяв в нём за базис $\{\, t_0^2 ,\, 2\, t_0 t_1^2 ,\, t_1^2 \,\}$ (так что координатами функции $q(t_0,t_1) = \beta_0 t_0^2 + 2\,\beta_1\, t_0 t_1 + \beta_2 t_1^2$ относительно этого базиса будут числа $(\beta_0, \beta_1, \beta_2)$). Рассмотрим теперь проективизации этих пространств $\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}(V)$ и $\mathbb{P}_2 = \mathbb{P}(W)$ (иначе говоря, рассмотрим $\mathbb{P}_2$, являющееся пространством квадрик на данном $\mathbb{P}_1$). Отображение Веронезе $\mathbb{P}_1 \longrightarrow \mathbb{P}_2$ переводит линейную функцию f в f^2. Убедитесь, что отображение Веронезе устанавливает биекцию между $\mathbb{P}_1$ и некоторой неприводимой коникой $C \subset \mathbb{P}_2$. Задайте C

а) явным однородным уравнением $f(\beta_0, \beta_1, \beta_2) = 0$

б) явными параметрическими уравнениями $\beta_i = \varphi_i(\alpha_0, \alpha_1)$, $i = 0, 1, 2$.

M49◇11. Всякая ли неприводимая коника $C \subset \mathbb{P}_2$ допускает рациональную параметризацию, т. е. 3 взаимно простых однороднородных многочлена $\varphi_i(\alpha_0, \alpha_1)$, $i = 0, 1, 2$, степени 2, таких что отображение $\mathbb{P}_1 \xrightarrow{(\alpha_0:\alpha_1)\mapsto(\varphi_0(\alpha_0,\alpha_1):\varphi_1(\alpha_0,\alpha_1):\varphi_2(\alpha_0,\alpha_1))} \mathbb{P}_2$ является биекцией между $\mathbb{P}_1$ и C?

M49◇12. Докажите, что 2 неприводимых коники либо совпадают либо пересекаются по $\leqslant 4$ точкам (причём над $\mathbb{C}$ всегда имеется ровно 4 точки пересечения с учётом кратности).

M49◇13. Пусть никакие 3 из 5 точек зад. M49◇5 не коллинеарны. Верно ли, что проходящая через них коника единственна и неприводима?

Игры с прямыми.

М50◇1 (квадрика Сегре). Рассмотрим $\mathbb{P}_3$, точками которого служат рассматриваемые с точностью до общей гомотопии пары векторов $a = (a_1, a_2)$, $b = (b_1, b_2)$ на плоскости, не обращающиеся одновременно в нуль. Убедитесь, что пары линейно зависимых векторов образуют при этом квадрику $S \subset \mathbb{P}_3$, и задайте её явным уравнением. Докажите, что множество всех прямых, лежащих на S, распадается на 2 непересекающихся подмножества, таких что: прямые в каждом из подмножеств попарно скрещиваются; каждая прямая одного подмножества пересекает каждую прямую другого; через каждую точку S проходит ровно по одной прямой из каждого подмножества.

М50◇2 (параметризация Сегре). В условиях предыдущей задачи, постройте отображение $\mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_1 \longrightarrow \mathbb{P}_3$, заданное явным параметрическим выражением координат $(a_1 : a_2 : b_1 : b_2)$ на $\mathbb{P}_3$ через пару координат $\Big((\alpha_0 : \alpha_1), (\beta_0, \beta_1)\Big)$ на $\mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_1$, устанавливающее биекцию между $\mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_1$ и S, при которой два семейства «координатных» прямых $\mathbb{P}_1 \times \{\text{точке}\}$ и $\{\text{точке}\} \times \mathbb{P}_1$ на $\mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_1$ переходят в два множества прямых на S из предыдущей задачи.

Определение. Прямая, лежащая на квадрике или пересекающая её в единственной точке, называется *касательной* к квадрике. Точка на квадрике называется *особой*, если всякая проходящая через неё прямая – касательная. Квадрика называется *неособой* или *невырожденной*, если у неё нет особых точек.

М50◇3. Рассмотрим конику $C \subset \mathbb{P}_2$, заданную в однородных координатах $(x_0 : x_1 : x_2)$ уравнением $\sum a_{ij}x_ix_j = 0$, где $0 \leqslant i, j \leqslant 2$ и при $i \neq j$ мы для симметрии считаем, что $a_{ij} = a_{ji} = \frac{1}{2}$(коэффициент при x_ix_j). Пусть $p = (p_0 : p_1 : p_2) \in C$, а $q = (q_0 : q_1 : q_2)$ — любая точка, отличная от p. Докажите, что прямая pq касается C в $p \iff \sum a_{ij}p_iq_j = 0$.

М50◇4. Докажите, что через неособую точку коники проходит ровно одна касательная к этой конике прямая, а через точку, не лежащую на неособой конике, проходит не более двух (над $\mathbb{C}$ — ровно 2) касательных к этой конике прямых.

М50◇5. Докажите, что коника $\sum a_{ij}x_ix_j = 0$ неособа тогда и только тогда когда $\det(a_{ij}) \neq 0$.

Пучки кривых. Рассмотрим пространство $\mathbb{P}_{n(d)}$, точками которого являются кривые степени d на $\mathbb{P}_2$, т. е. рассматриваемые с точностью до пропорциональности однородные многочлены степени d от $(x_0 : x_1 : x_2)$. Множество всех кривых степени d, изображаемых какой-либо прямой $\ell \subset \mathbb{P}_{n(d)}$ называется *пучком* плоских кривых. Обязательно найдите $n(d)$ явно.

М50◇6. В любом ли пучке найдётся кривая, проходящая через произвольно заданную точку?

М50◇7. Пусть какие-то 2 кривые из пучка проходят через точку p. Верно ли, что тогда и все кривые пучка проходят через p?

М50◇8. Сколько особых коник может быть в пучке коник?

М50◇9. Докажите, что через любые 4 точки на $\mathbb{P}_2$ проходит пучок коник, причём если никакие из точек не коллинеарны, то он будет единственным и с ровно тремя особыми кониками.

М50◇10. Верно ли, что через каждые 9 точек на $\mathbb{P}_2$ можно провести кубику (т. е. кривую третьей степени), а через каждые 8 — пучок кубик?

М50◇11* (гексограмма Паскаля). Пусть шестиугольник $p_1p_2p_3p_4p_5p_6$ вписан в конику C, и $q_{36} = p_1p_2 \cap p_4p_5$, $q_{41} = p_2p_3 \cap p_5p_6$, $q_{52} = p_3p_4 \cap p_6p_1$ суть точки пересечения продолжений трёх пар его противоположных сторон. Верно ли, что 3 кубики, — (1) объединение прямых p_1p_2, p_3p_4 и p_5p_6, (2) объединение прямых p_2p_3, p_4p_5 и p_6p_1, (3) объединение коники C с прямой $q_{36}q_{14}$, — **а*)** лежат в одном пучке **б)** проходят через q_{23}?

М50◇12* (теорема Паскаля). Докажите, что вокруг шестиугольника тогда и только тогда можно описать конику, когда 3 точки пересечения продолжений пар его противоположных сторон лежат на одной прямой.

Дробно линейные преобразования $\mathbb{CP}_1$

М$50\frac{1}{2}$◇1°. Рассмотрим $\mathbb{P}_1$ с однородными координатами $(x_0 : x_1)$ и аффинную карту $\{x_1 = 1\}$ с аффинной координатой $t = x_0/x_1$. Убедитесь, что отображение $\varphi : t \longmapsto (at+c)/(bt+d)$ тогда и только тогда определяет взаимно однозначное отображение $\mathbb{P}_1 \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}_1$, когда $ad \neq bc$; а также: **а)** найдите образы и прообразы точек 0, 1 и ∞;

б) явно вычислите[1] обратное преобразование φ^{-1} и композицию $\varphi_2 \circ \varphi_1$ преобразований $\varphi_1 : t \longmapsto (a_1 t + c_1)/(b_1 t + d_1)$ и $\varphi_2 : t \longmapsto (a_2 t + c_2)/(b_2 t + d_2)$;

в) докажите, что две матрицы вида $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ с $ad \neq bc$ тогда и только тогда определяют одинаковые преобразования $\mathbb{P}_1 \xrightarrow{t \mapsto (at+c)/(bt+d)} \mathbb{P}_1$, когда они пропорциональны.

М$50\frac{1}{2}$◇2. Сколько неподвижных точек может быть у нетождественного дробно линейного преобразования $\mathbb{P}_1 \longrightarrow \mathbb{P}_1$ над $\mathbb{R}$ и над $\mathbb{C}$?

М$50\frac{1}{2}$◇3. Пусть p_1, p_2, p_3 суть три попарно разных точки на $\mathbb{P}_1$, и q_1, q_2, q_3 ещё три попарно разных точки на $\mathbb{P}_1$. Докажите, что существует единственное дробно линейное преобразование $\mathbb{P}_1 \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}_1$, переводящее p_i в q_i при всех $i = 1, 2, 3$. Напишите явную формулу для преобразования, переводящего заданные конечные a, b, c соответственно в $0, 1, \infty$.

М$50\frac{1}{2}$◇4. Напишите явную формулу, по которой преобразуется координата x при проектировании x-оси на окружность $x^2 + y^2 = 1$ из точки $(0, 1)$, а затем обратном проектировании окружности на x-ось из точки $(0, -1)$.

М$50\frac{1}{2}$◇5. Рассмотрим прямую $\ell \subset \mathbb{P}_2$, неособую конику $Q \subset \mathbb{P}_2$ и точку $p \in Q$. Проекция $Q \xrightarrow{\pi_p} \ell$ переводит $q \in Q$, $q \neq p$ в точку пересечения прямой pq с ℓ, а точку p в точку пересечения прямой ℓ с касательной к Q в точке p. Докажите, что π_p взаимно однозначна и что однородные координаты точек q и $\pi_p(q)$ выражаются друг через друга в виде рациональных алгебраических функций[2].

М$50\frac{1}{2}$◇6 (автоморфизмы $\mathbb{CP}_1$). Предположим, что некое взаимно однозначное отображение

$$\mathbb{P}_1 \setminus \{\text{конечное множество точек}\} \xrightarrow{\varphi} \mathbb{P}_1 \setminus \{\text{конечное множество точек}\}$$

корректно определяется правилом $\varphi : (x_0 : x_1) \longmapsto \left(\dfrac{p_0(x_0, x_1)}{q_0(x_0, x_1)} : \dfrac{p_0(x_0, x_1)}{q_0(x_0, x_1)} \right)$, где p_i и q_i суть *многочлены* от (x_0, x_1). Докажите, что увеличивая, если надо, конечные множества точек неопределённости, но не изменяя отображения на остальных точках, можно считать что:

а) $q_0 \equiv q_1 \equiv 1$, а p_0, p_1 однородны, имеют одинаковую степень и взаимно просты;

б) $\deg p_0 = \deg p_1 = 1$, и φ является дробно линейным преобразованием (в частности, если φ было определено всюду, то оно было дробно линейным преобразованием).

М$50\frac{1}{2}$◇7. Рассмотрим на $\mathbb{P}_2$ прямую ℓ, пару точек $p_1, p_2 \notin \ell$ и ещё 3 точки a, b, c, такие что никакие 3 из 5 точек p_1, p_2, a, b, c не коллинеарны. Отождествим ℓ с пучком $\wp_1$ всех прямых, проходящих через p_1, сопоставляя каждой прямой $\ell' \in \wp_1$ точку $\ell' \cap \ell \in \ell$; аналогичным же способом отождествим ℓ и с пучком $\wp_2$ всех прямых, проходящих через p_2. Рассмотрим теперь единственное дробно линейное преобразование $\ell \xrightarrow{\gamma_{abc}} \ell$ (или — что то же самое — преобразование $\wp_1 \xrightarrow{\gamma_{abc}} \wp_2$), которое переводит прямые p_1a, p_1b, p_1c из $\wp_1 \simeq \ell$ в прямые p_2a, p_2b, p_2c из $\wp_2 \simeq \ell$. Опишите фигуру, нарисуемую точкой пересечения прямых $\ell' \in \wp_1$ и $\gamma_{abc}(\ell') \in \wp_2$, пока ℓ' пробежит весь пучок $\wp_1$.

[1] в частности, убедитесь, что они тоже будут дробно линейными преобразованиями

[2] рациональная алгебраическая функция — это отношение двух многочленов

М50$\frac{1}{2}$◇8. Рассмотрим на $\mathbb{P}_2$ пару прямых ℓ_1, ℓ_2 и не лежащую на них точку O. Докажите, что проектирование $\ell_1 \xrightarrow{\gamma_O} \ell_2$ из точки O, переводящее $p \in \ell_1$ в $Op \cap \ell_2 \in \ell_2$ является взаимно однозначным дробно линейным[3] отображением.

М50$\frac{1}{2}$◇9. Рассмотрим пару прямых $\ell_1, \ell_2 \subset \mathbb{P}_2$ и пару точек p_1, p_2, лежащих на неособой конике $Q \subset \mathbb{P}_2$. Докажите, что отображение $\ell_1 \xrightarrow{\gamma_Q^{p_2p_1}} \ell_2$, являющееся композицией двух проекций $\ell_1 \xrightarrow{\pi_{p_1}^{-1}} Q \xrightarrow{\pi_{p_2}} \ell_2$ является взаимно однозначным дробно линейным отображением (см. рис $50\frac{1}{2}$ - 1).

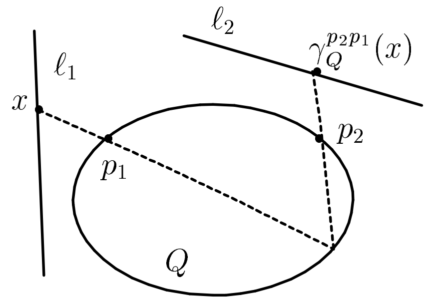


Рис. $50\frac{1}{2}$ - 1. Композиция проекций.

М50$\frac{1}{2}$◇10. Докажите, что любой дробно линейный изоморфизм $\ell_1 \xrightarrow{\gamma} \ell_2$ между двумя прямыми $\ell_1, \ell_2 \subset \mathbb{P}_2$ можно (вообще говоря, многими способами) реализовать описанным в зад. М50$\frac{1}{2}$◇9 способом в виде $\gamma_Q^{p_2p_1}$ с подходящими $Q \subset \mathbb{P}_2$ и $p_1, p_2 \in Q$.

Указание. Пусть γ отображает $a_1, b_1, c_1 \in \ell_1$ в $a_2, b_2, c_2 \in \ell_2$. Возьмите любую точку $p_1 \in \mathbb{P}_2$, а p_2 выберите так, чтобы никакие 3 из 5 точек p_1, p_2, $a_1p_1 \cap a_2p_2$, $b_1p_1 \cap b_2p_2$ и $c_1p_1 \cap c_2p_2$ не были коллинеарны, и проведите через эти 5 точек единственную неособую конику Q (см. рис $50\frac{1}{2}$ - 2).

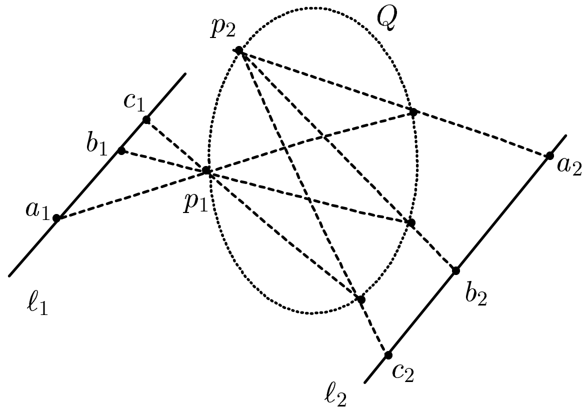


Рис. $50\frac{1}{2}$ - 2. Разложение в композицию.

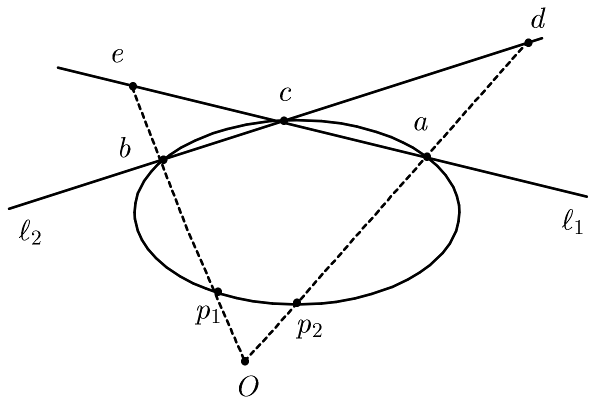


Рис. $50\frac{1}{2}$ - 3. Замечательное соответствие.

М50$\frac{1}{2}$◇11. Пусть точки p_1, p_2, a, b, c лежат на неособой конике Q. Обозначим через ℓ_1 и ℓ_2 прямые ac и bc, и пусть $O = ap_2 \cap bp_1$ (см. рис. $50\frac{1}{2}$ - 3). Отличается ли тут композиция проекций $\ell_1 \xrightarrow{\gamma_Q^{p_2p_1}} \ell_2$ из зад. М50$\frac{1}{2}$◇9 от простого проектирования $\ell_1 \xrightarrow{\gamma_O} \ell_2$ из зад. М50$\frac{1}{2}$◇8?

М50$\frac{1}{2}$◇12. Одной линейкой постройте сколь угодно плотное множество точек коники, проходящей через данные 5 точек на $\mathbb{P}_2$.

М50$\frac{1}{2}$◇13. Выведите из зад. М50$\frac{1}{2}$◇12 новое доказательство теоремы Паскаля: 6 точек $p_1, p_2, \dots, p_6$, никакие 3 из которых не коллинеарны, тогда и только тогда лежат на (неособой) конике, когда коллинеарны точки: $p_1p_2 \cap p_4p_5$, $p_2p_3 \cap p_5p_6$, $p_3p_4 \cap p_6p_1$.

Указание. На самом деле зад. М50$\frac{1}{2}$◇11 задаёт соответствие между прямыми $L \ni O$ и точками $x \in Q$, см. рис. $50\frac{1}{2}$ - 4.

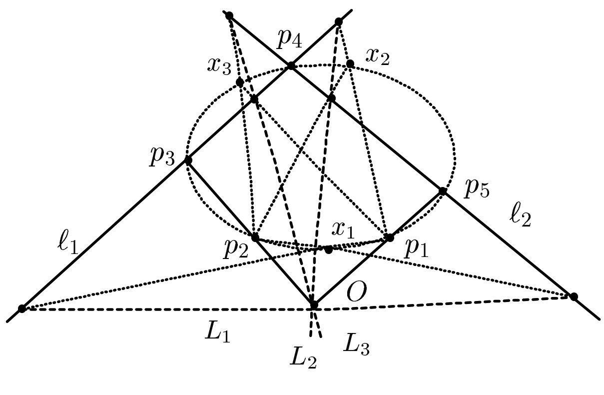


Рис. $50\frac{1}{2}$ - 4. Соответствие $L_i \leftrightarrow x_i$.

М50$\frac{1}{2}$◇14*. Одной линейкой постройте образ данной точки $x \in \ell_1$ при дробно линейном преобразовании $\ell_1 \longrightarrow \ell_2$, переводящем данные точки $a_1, b_1, c_1 \in \ell_1$ в данные точки $a_2, b_2, c_2 \in \ell_2$.

[3] т. е. имеет вид $t \longmapsto u(t) = (at+c)/(bt+d)$, где t, u — какие-то аффинные координаты на ℓ_1 и ℓ_2 соответственно

Проективная двойственность

Двойственные плоскости. Рассмотрим трёхмерное пространство V с базисом $\{e_0, e_1, e_2\}$ и координатами (x_0, x_1, x_2) относительно этого базиса. Обозначим через V^* множество всех *линейных* функций на V со значениями в основном поле ($\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$). Поскольку всякая линейная функция имеет вид $\alpha(x_0, x_1, x_2) = \alpha_0 x_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$, где $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ — какие-то константы, V^* также является трёхмерным пространством с базисом $\{x_0, x_1, x_2\}$ (так, координатами предыдущей функции $\alpha(x_0, x_1, x_2)$ относительно этого базиса служат числа $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)$). Проективные плоскости $\mathbb{P}_2 = \mathbb{P}(V)$ и $\mathbb{P}_2^\times = \mathbb{P}(V^*)$ называются *двойственными*. Каждая из них естественно отождествляется с *множеством всех прямых* на другой. Действительно, линейное уравнение $\alpha_0 x_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = 0$ при фиксированном $\alpha = (\alpha_0 : \alpha_1 : \alpha_2) \in \mathbb{P}_2^\times$ задаёт прямую на $\mathbb{P}_2$, а при фиксированном $(x_0 : x_1 : x_2) \in \mathbb{P}_2$ задаёт прямую на $\mathbb{P}_2^\times$, и пропорциональные линейные уравнения задают одинаковые прямые.

М$50\frac{2}{3}\diamond$1. Проверьте следующее соответствие между геометриями на $\mathbb{P}_2$ и $\mathbb{P}_2^\times$:

прямая $\ell \subset \mathbb{P}_2$	$\longleftrightarrow$	точка $\ell^\times \in \mathbb{P}_2^\times$
точки p прямой ℓ	$\longleftrightarrow$	прямые $p^\times$ проходящие через точку $\ell^\times$
прямая, проходящая через точки $p_1, p_2 \in \mathbb{P}_2$	$\longleftrightarrow$	точка пересечения паря прямых $p_1^\times, p_2^\times \subset \mathbb{P}_2^\times$
точки p, лежащие на некоторой конике Q	$\longleftrightarrow$	касательные $p^\times$ к некоторой конике $Q^\times$
прямые ℓ, касающиеся Q	$\longleftrightarrow$	точки $\ell^\times \in Q^\times$

(в частности, убедитесь, что касательные к невырожденной конике $Q \subset \mathbb{P}_2$ составляют невырожденную конику $Q^\times \subset \mathbb{P}_2^\times$).

М$50\frac{2}{3}\diamond$2. Сколько коник на $\mathbb{P}_2$ касается данных пяти прямых общего положения?

М$50\frac{2}{3}\diamond$3 (теорема Паппа). Докажите, что шестиугольник описан вокруг коники, если и только если 3 прямые, соединяющие его противоположные вершины, пересекаются в одной точке.

М$50\frac{2}{3}\diamond$4. Рассмотрим пару прямых $p_1^\times, p_2^\times \in \mathbb{P}_2^\times$, изображающих пучки прямых, проходящих через точки $p_1, p_2 \in \mathbb{P}_2$. Докажите, что дробно линейные отображения $p_1^\times \xrightarrow{\gamma} p_2^\times$ взаимно однозначно соответствуют отличным от двойной прямой коникам $Q \subset \mathbb{P}_2$, проходящим через точки p_1, p_2 так, что $\gamma(\ell) = \ell'$ для $\ell \in p_1^\times$, $\ell' \in p_2^\times$, равносильно тому, что $\ell \cap \ell' \in Q$.

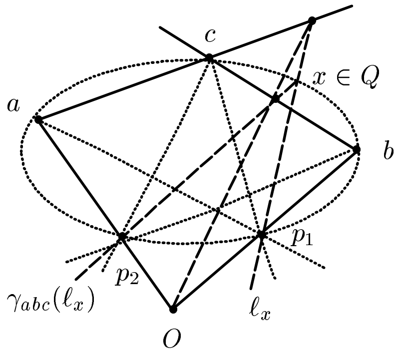


Рис. $50\frac{2}{3}$ - 1.

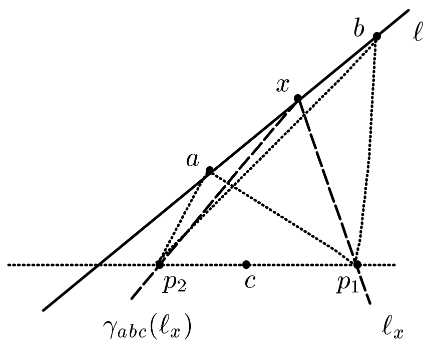


Рис. $50\frac{2}{3}$ - 2.

Указание. Возьмём любые 3 прямые $\ell_1, \ell_2, \ell_3 \subset \mathbb{P}_2$ из пучка $p_1^\times$; тогда $\gamma = \gamma_{abc}$ однозначно определяется 3 точками: $a = \ell_1 \cap \gamma(\ell_1)$, $b = \ell_2 \cap \gamma(\ell_2)$, $c = \ell_3 \cap \gamma(\ell_3)$, и ясно, что $Q \supset a, b, c, p_1, p_2$. Обратите внимание, что есть два геометрически разных типа отображений γ (см. рис. $50\frac{2}{3}$ - 1 и рис. $50\frac{2}{3}$ - 2): т. н. *эллиптические* отвечают неприводимым коникам, а т. н. *параболические* — приводимым.

М$50\frac{2}{3}\diamond$5. Одной линейкой постройте образ данной прямой $\ell \ni p_1$ на $\mathbb{P}_2$ при дробно линейном преобразовании $p_1^\times \xrightarrow{\gamma} p_2^\times$, переводящем данные 3 прямые $\ell_1, \ell_2, \ell_3 \ni p_1$ в данные 3 прямые $\ell'_1, \ell'_2, \ell'_3 \ni p_2$.

М$50\frac{2}{3}\diamond$6. Установите проективно двойственное к построенному в зад. М$50\frac{2}{3}\diamond$4 описанию дробно линейных отображений $\ell_1 \xrightarrow{\gamma} \ell_2$ между двумя прямыми на $\mathbb{P}_2$ посредством коник, а именно докажите что:

а) для каждого эллиптического преобразования γ существует единственная неприводимая коника Q, касающаяся обеих прямых ℓ_1, ℓ_2, такая что $p_2 = \gamma(p_1) \iff$ прямая p_1p_2 касается Q (см. рис. $50\frac{2}{3}$ - 3);

б) для каждого параболического преобразования γ существует единственная точка $O \in \mathbb{P}_2 \setminus (\ell_1 \cup \ell_2)$, такая что $p_2 = \gamma(p_1) \iff$ прямая p_1p_2 проходит через O (см. рис. $50\frac{2}{3}$ - 4).

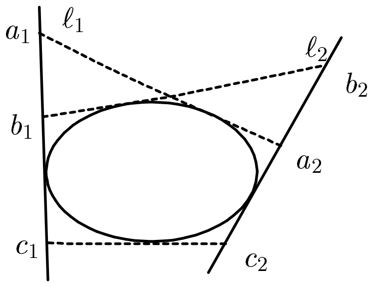


Рис. $50\frac{2}{3}$ - 3.

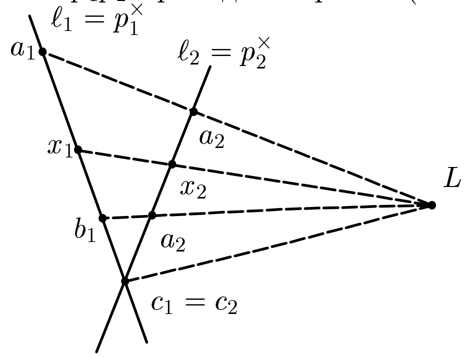


Рис. $50\frac{2}{3}$ - 4.

M$50\frac{2}{3}\diamond$7. Объясните следующей способ построения образа данной точки $x \in \ell_1$ при дробно линейном преобразовании $\ell_1 \xrightarrow{\gamma} \ell_2$, заданным своим действием на три данные точки: $a_1 \longmapsto a_2$, $b_1 \longmapsto b_2$, $c_1 \longmapsto c_2$ (см. рис. $50\frac{2}{3}$ - 5): проводим прямую $O^\times = b_1a_2$ и отмечаем точку её пересечения с прямой, соединяющей x с точкой $a_1a_2 \cap c_1c_2$; прямая, соединяющая отмеченную точку с точкой $b_1b_2 \cap c_1c_2$, пересекает ℓ_2 в точности в точке $\gamma(x)$ (ср. рис. $50\frac{2}{3}$ - 1 и рис. $50\frac{2}{3}$ - 5).

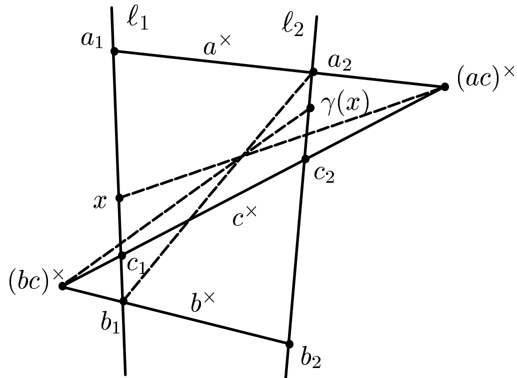


Рис. $50\frac{2}{3}$ - 5. Построение $\gamma(x)$.

M$50\frac{2}{3}\diamond$8*. Зафиксируем рациональную параметризацию[1] $\mathbb{P}_1 \xrightarrow{\sim} Q$ данной неприводимой коники $Q \subset \mathbb{P}_2$. Докажите, что каждое взаимно однозначного отображение $Q \xrightarrow{\gamma} Q$, индуцированное дробно линейной заменой параметра на $\mathbb{P}_1$, представляется (неоднозначно) как композиция проекции Q из подходящей точки $p_1 \in Q$ на подходящую прямую $\ell \subset \mathbb{P}_2$ и обратной проекции ℓ на Q из подходящей точки $p_2 \in Q$. Найдите неподвижные точки такого преобразования и укажите способ построения точек p_1, p_2 и прямой ℓ при помощи одной линейки, если известны образы $q_1', q_2', q_3' \in Q$ каких-то трёх разных точек $q_1, q_2, q_3 \in Q$ при отображении γ.

M$50\frac{2}{3}\diamond$9*. Одной линейкой впишите в заданную конику треугольник, последовательные стороны которого содержат три заданные точки. Сколько решений имеет эта задача?

Указание. Начните построение с произвольной точки $q \in Q$; тогда третья сторона треугольника вернётся, скорее всего, в некоторую точку $q' \neq q$, лежащую на конике, но преобразование $q \mapsto q'$ будет дробно линейной перепараметризацией коники — остаётся только найти его неподвижные точки!

M$50\frac{2}{3}\diamond$10*. Сформулируйте и решите проективно двойственную к предыдущей задачу.

M$50\frac{2}{3}\diamond$11* (полярное преобразование). Пусть неприводимая коника $Q \subset \mathbb{P}_2$ задаётся уравнением $\sum\limits_{ij} a_{ij}x_ix_j = 0$. Докажите, что отображение $\mathbb{P}_2 \xrightarrow{\widehat{Q}} \mathbb{P}_2^\times$, переводящее $(x_0 : x_1 : x_2)$ в $\alpha = (\alpha_0 : \alpha_1 : \alpha_2)$ с $\alpha_i = \sum\limits_\nu a_{\nu i}x_\nu$ линейно, взаимно однозначно и, будучи интерпретировано как биекция между точками и прямыми[2] на $\mathbb{P}_2$, переводит всякую точку p в прямую, соединяющую точки касания с Q пары опущенных на неё из p касательных. Для примера, опишите полярное преобразование относительно (аффинной) коники $x^2 + y^2 = -1$.

[1]например, спроектируем Q на какую-нибудь прямую $\ell' \simeq \mathbb{P}_1$ из любой точки $p' \in Q$

[2]соответственные точка и прямая называются при этом *полюсом полярой* друг друга относительно Q