Игры с прямыми.

М50◇1 (квадрика Сегре). Рассмотрим $\mathbb{P}_3$, точками которого служат рассматриваемые с точностью до общей гомотопии пары векторов $a = (a_1, a_2)$, $b = (b_1, b_2)$ на плоскости, не обращающиеся одновременно в нуль. Убедитесь, что пары линейно зависимых векторов образуют при этом квадрику $S \subset \mathbb{P}_3$, и задайте её явным уравнением. Докажите, что множество всех прямых, лежащих на S, распадается на 2 непересекающихся подмножества, таких что: прямые в каждом из подмножеств попарно скрещиваются; каждая прямая одного подмножества пересекает каждую прямую другого; через каждую точку S проходит ровно по одной прямой из каждого подмножества.

М50◇2 (параметризация Сегре). В условиях предыдущей задачи, постройте отображение $\mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_1 \longrightarrow \mathbb{P}_3$, заданное явным параметрическим выражением координат $(a_1 : a_2 : b_1 : b_2)$ на $\mathbb{P}_3$ через пару координат $\Big((\alpha_0 : \alpha_1), (\beta_0, \beta_1)\Big)$ на $\mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_1$, устанавливающее биекцию между $\mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_1$ и S, при которой два семейства «координатных» прямых $\mathbb{P}_1 \times \{\text{точке}\}$ и $\{\text{точке}\} \times \mathbb{P}_1$ на $\mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_1$ переходят в два множества прямых на S из предыдущей задачи.

Определение. Прямая, лежащая на квадрике или пересекающая её в единственной точке, называется *касательной* к квадрике. Точка на квадрике называется *особой*, если всякая проходящая через неё прямая – касательная. Квадрика называется *неособой* или *невырожденной*, если у неё нет особых точек.

М50◇3. Рассмотрим конику $C \subset \mathbb{P}_2$, заданную в однородных координатах $(x_0 : x_1 : x_2)$ уравнением $\sum a_{ij}x_ix_j = 0$, где $0 \leqslant i, j \leqslant 2$ и при $i \neq j$ мы для симметрии считаем, что $a_{ij} = a_{ji} = \frac{1}{2}$(коэффициент при x_ix_j). Пусть $p = (p_0 : p_1 : p_2) \in C$, а $q = (q_0 : q_1 : q_2)$ — любая точка, отличная от p. Докажите, что прямая pq касается C в $p \iff \sum a_{ij}p_iq_j = 0$.

М50◇4. Докажите, что через неособую точку коники проходит ровно одна касательная к этой конике прямая, а через точку, не лежащую на неособой конике, проходит не более двух (над $\mathbb{C}$ — ровно 2) касательных к этой конике прямых.

М50◇5. Докажите, что коника $\sum a_{ij}x_ix_j = 0$ неособа тогда и только тогда когда $\det(a_{ij}) \neq 0$.

Пучки кривых. Рассмотрим пространство $\mathbb{P}_{n(d)}$, точками которого являются кривые степени d на $\mathbb{P}_2$, т. е. рассматриваемые с точностью до пропорциональности однородные многочлены степени d от $(x_0 : x_1 : x_2)$. Множество всех кривых степени d, изображаемых какой-либо прямой $\ell \subset \mathbb{P}_{n(d)}$ называется *пучком* плоских кривых. Обязательно найдите $n(d)$ явно.

М50◇6. В любом ли пучке найдётся кривая, проходящая через произвольно заданную точку?

М50◇7. Пусть какие-то 2 кривые из пучка проходят через точку p. Верно ли, что тогда и все кривые пучка проходят через p?

М50◇8. Сколько особых коник может быть в пучке коник?

М50◇9. Докажите, что через любые 4 точки на $\mathbb{P}_2$ проходит пучок коник, причём если никакие из точек не коллинеарны, то он будет единственным и с ровно тремя особыми кониками.

М50◇10. Верно ли, что через каждые 9 точек на $\mathbb{P}_2$ можно провести кубику (т. е. кривую третьей степени), а через каждые 8 — пучок кубик?

М50◇11* (гексограмма Паскаля). Пусть шестиугольник $p_1p_2p_3p_4p_5p_6$ вписан в конику C, и $q_{36} = p_1p_2 \cap p_4p_5$, $q_{41} = p_2p_3 \cap p_5p_6$, $q_{52} = p_3p_4 \cap p_6p_1$ суть точки пересечения продолжений трёх пар его противоположных сторон. Верно ли, что 3 кубики, — (1) объединение прямых p_1p_2, p_3p_4 и p_5p_6, (2) объединение прямых p_2p_3, p_4p_5 и p_6p_1, (3) объединение коники C с прямой $q_{36}q_{14}$, — **а*)** лежат в одном пучке **б)** проходят через q_{23}?

М50◇12* (теорема Паскаля). Докажите, что вокруг шестиугольника тогда и только тогда можно описать конику, когда 3 точки пересечения продолжений пар его противоположных сторон лежат на одной прямой.