Проективная двойственность

Двойственные плоскости. Рассмотрим трёхмерное пространство V с базисом $\{e_0, e_1, e_2\}$ и координатами (x_0, x_1, x_2) относительно этого базиса. Обозначим через V^* множество всех *линейных* функций на V со значениями в основном поле ($\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$). Поскольку всякая линейная функция имеет вид $\alpha(x_0, x_1, x_2) = \alpha_0 x_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$, где $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ — какие-то константы, V^* также является трёхмерным пространством с базисом $\{x_0, x_1, x_2\}$ (так, координатами предыдущей функции $\alpha(x_0, x_1, x_2)$ относительно этого базиса служат числа $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)$). Проективные плоскости $\mathbb{P}_2 = \mathbb{P}(V)$ и $\mathbb{P}_2^\times = \mathbb{P}(V^*)$ называются *двойственными*. Каждая из них естественно отождествляется с *множеством всех прямых* на другой. Действительно, линейное уравнение $\alpha_0 x_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = 0$ при фиксированном $\alpha = (\alpha_0 : \alpha_1 : \alpha_2) \in \mathbb{P}_2^\times$ задаёт прямую на $\mathbb{P}_2$, а при фиксированном $(x_0 : x_1 : x_2) \in \mathbb{P}_2$ задаёт прямую на $\mathbb{P}_2^\times$, и пропорциональные линейные уравнения задают одинаковые прямые.

M$50\frac{2}{3}$◇1. Проверьте следующее соответствие между геометриями на $\mathbb{P}_2$ и $\mathbb{P}_2^\times$:

прямая $\ell \subset \mathbb{P}_2$	$\longleftrightarrow$	точка $\ell^\times \in \mathbb{P}_2^\times$
точки p прямой ℓ	$\longleftrightarrow$	прямые $p^\times$ проходящие через точку $\ell^\times$
прямая, проходящая через точки $p_1, p_2 \in \mathbb{P}_2$	$\longleftrightarrow$	точка пересечения паря прямых $p_1^\times, p_2^\times \subset \mathbb{P}_2^\times$
точки p, лежащие на некоторой конике Q	$\longleftrightarrow$	касательные $p^\times$ к некоторой конике $Q^\times$
прямые ℓ, касающиеся Q	$\longleftrightarrow$	точки $\ell^\times \in Q^\times$

(в частности, убедитесь, что касательные к невырожденной конике $Q \subset \mathbb{P}_2$ составляют невырожденную конику $Q^\times \subset \mathbb{P}_2^\times$).

M$50\frac{2}{3}$◇2. Сколько коник на $\mathbb{P}_2$ касается данных пяти прямых общего положения?

M$50\frac{2}{3}$◇3 (теорема Паппа). Докажите, что шестиугольник описан вокруг коники, если и только если 3 прямые, соединяющие его противоположные вершины, пересекаются в одной точке.

M$50\frac{2}{3}$◇4. Рассмотрим пару прямых $p_1^\times, p_2^\times \in \mathbb{P}_2^\times$, изображающих пучки прямых, проходящих через точки $p_1, p_2 \in \mathbb{P}_2$. Докажите, что дробно линейные отображения $p_1^\times \xrightarrow{\gamma} p_2^\times$ взаимно однозначно соответствуют отличным от двойной прямой коникам $Q \subset \mathbb{P}_2$, проходящим через точки p_1, p_2 так, что $\gamma(\ell) = \ell'$ для $\ell \in p_1^\times$, $\ell' \in p_2^\times$, равносильно тому, что $\ell \cap \ell' \in Q$.

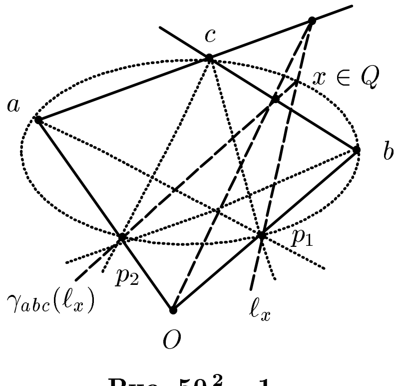

Рис. $50\frac{2}{3}$ - 1.

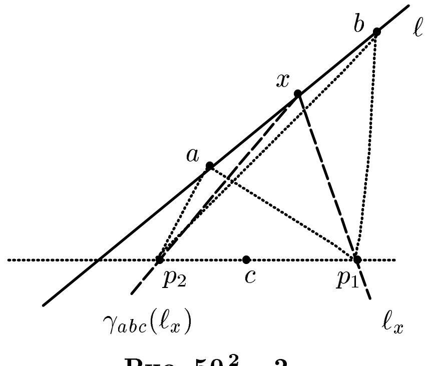

Рис. $50\frac{2}{3}$ - 2.

Указание. Возьмём любые 3 прямые $\ell_1, \ell_2, \ell_3 \subset \mathbb{P}_2$ из пучка $p_1^\times$; тогда $\gamma = \gamma_{abc}$ однозначно определяется 3 точками: $a = \ell_1 \cap \gamma(\ell_1)$, $b = \ell_2 \cap \gamma(\ell_2)$, $c = \ell_3 \cap \gamma(\ell_3)$, и ясно, что $Q \supset a, b, c, p_1, p_2$. Обратите внимание, что есть два геометрически разных типа отображений γ (см. рис. $50\frac{2}{3}$ - 1 и рис. $50\frac{2}{3}$ - 2): т. н. *эллиптические* отвечают неприводимым коникам, а т. н. *параболические* — приводимым.

M$50\frac{2}{3}$◇5. Одной линейкой постройте образ данной прямой $\ell \ni p_1$ на $\mathbb{P}_2$ при дробно линейном преобразовании $p_1^\times \xrightarrow{\gamma} p_2^\times$, переводящем данные 3 прямые $\ell_1, \ell_2, \ell_3 \ni p_1$ в данные 3 прямые $\ell'_1, \ell'_2, \ell'_3 \ni p_2$.

M$50\frac{2}{3}$◇6. Установите проективно двойственное к построенному в зад. M$50\frac{2}{3}$◇4 описанию дробно линейных отображений $\ell_1 \xrightarrow{\gamma} \ell_2$ между двумя прямыми на $\mathbb{P}_2$ посредством коник, а именно докажите что:

а) для каждого эллиптического преобразования γ существует единственная неприводимая коника Q, касающаяся обеих прямых ℓ_1, ℓ_2, такая что $p_2 = \gamma(p_1) \iff$ прямая p_1p_2 касается Q (см. рис. $50\frac{2}{3}$ - 3);

б) для каждого параболического преобразования γ существует единственная точка $O \in \mathbb{P}_2 \setminus (\ell_1 \cup \ell_2)$, такая что $p_2 = \gamma(p_1) \iff$ прямая p_1p_2 проходит через O (см. рис. $50\frac{2}{3}$ - 4).

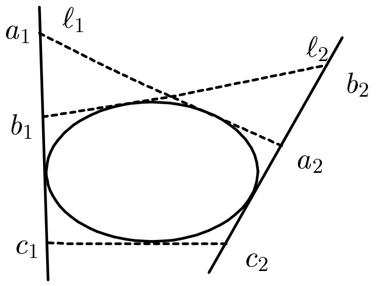

Рис. $50\frac{2}{3}$ - 3.

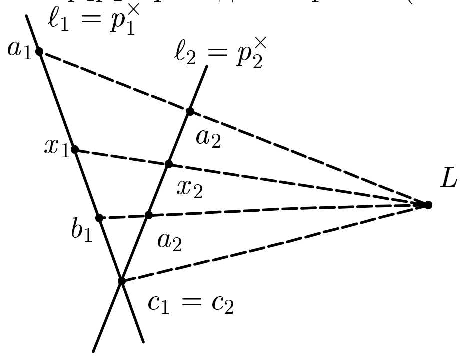

Рис. $50\frac{2}{3}$ - 4.

M$50\frac{2}{3}\diamond$7. Объясните следующей способ построения образа данной точки $x \in \ell_1$ при дробно линейном преобразовании $\ell_1 \xrightarrow{\gamma} \ell_2$, заданным своим действием на три данные точки: $a_1 \longmapsto a_2$, $b_1 \longmapsto b_2$, $c_1 \longmapsto c_2$ (см. рис. $50\frac{2}{3}$ - 5): проводим прямую $O^\times = b_1a_2$ и отмечаем точку её пересечения с прямой, соединяющей x с точкой $a_1a_2 \cap c_1c_2$; прямая, соединяющая отмеченную точку с точкой $b_1b_2 \cap c_1c_2$, пересекает ℓ_2 в точности в точке $\gamma(x)$ (ср. рис. $50\frac{2}{3}$ - 1 и рис. $50\frac{2}{3}$ - 5).

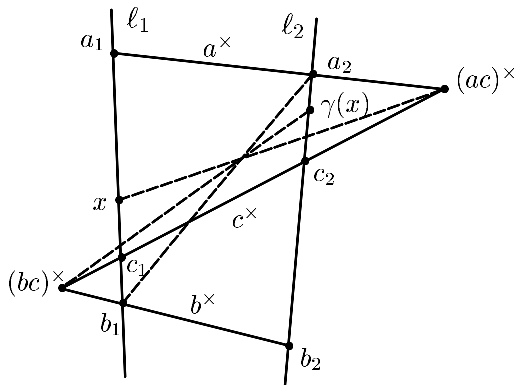

Рис. $50\frac{2}{3}$ - 5. Построение $\gamma(x)$.

M$50\frac{2}{3}\diamond$8*. Зафиксируем рациональную параметризацию[1] $\mathbb{P}_1 \xrightarrow{\sim} Q$ данной неприводимой коники $Q \subset \mathbb{P}_2$. Докажите, что каждое взаимно однозначного отображение $Q \xrightarrow{\gamma} Q$, индуцированное дробно линейной заменой параметра на $\mathbb{P}_1$, представляется (неоднозначно) как композиция проекции Q из подходящей точки $p_1 \in Q$ на подходящую прямую $\ell \subset \mathbb{P}_2$ и обратной проекции ℓ на Q из подходящей точки $p_2 \in Q$. Найдите неподвижные точки такого преобразования и укажите способ построения точек p_1, p_2 и прямой ℓ при помощи одной линейки, если известны образы $q_1', q_2', q_3' \in Q$ каких-то трёх разных точек $q_1, q_2, q_3 \in Q$ при отображении γ.

M$50\frac{2}{3}\diamond$9*. Одной линейкой впишите в заданную конику треугольник, последовательные стороны которого содержат три заданные точки. Сколько решений имеет эта задача?

Указание. Начните построение с произвольной точки $q \in Q$; тогда третья сторона треугольника вернётся, скорее всего, в некоторую точку $q' \neq q$, лежащую на конике, но преобразование $q \mapsto q'$ будет дробно линейной перепараметризацией коники — остаётся только найти его неподвижные точки!

M$50\frac{2}{3}\diamond$10*. Сформулируйте и решите проективно двойственную к предыдущей задачу.

M$50\frac{2}{3}\diamond$11* (полярное преобразование). Пусть неприводимая коника $Q \subset \mathbb{P}_2$ задаётся уравнением $\sum\limits_{ij} a_{ij}x_ix_j = 0$. Докажите, что отображение $\mathbb{P}_2 \xrightarrow{\widehat{Q}} \mathbb{P}_2^\times$, переводящее $(x_0 : x_1 : x_2)$ в $\alpha = (\alpha_0 : \alpha_1 : \alpha_2)$ с $\alpha_i = \sum\limits_{\nu} a_{\nu i}x_\nu$ линейно, взаимно однозначно и, будучи интерпретировано как биекция между точками и прямыми[2] на $\mathbb{P}_2$, переводит всякую точку p в прямую, соединяющую точки касания с Q пары опущенных на неё из p касательных. Для примера, опишите полярное преобразование относительно (аффинной) коники $x^2 + y^2 = -1$.

[1] например, спроектируем Q на какую-нибудь прямую $\ell' \simeq \mathbb{P}_1$ из любой точки $p' \in Q$

[2] соответственные точка и прямая называются при этом *полюсом полярой* друг друга относительно Q