Проективные квадрики

Квадрика в $\mathbb{P}_n$ — это ГМТ, однородные координаты $(x_0 : x_1 : \ \ldots : x_n)$ которых удовлетворяют уравнению $f(x_0, x_1, \ldots, x_n) = 0$, где f — однородный многочлен степени 2; плоские квадрики обычно называют *кониками*. Две квадрики называются *геометрически одинаковыми*, если они получаются друг из друга линейной обратимой заменой однородных координат. Квадрики заданные пропорциональными уравнениями просто равны как множества. Поэтому квадрики являются точками проективного пространства $\mathbb{P}_{N(n)}$, где $N(n)+1$ — это число коэффициентов однородного многочлена степени 2 от $n+1$ переменных. Квадрика называется *неприводимой*, если её уравнение — неприводимый многочлен.

М49◇1°. Явно выразите $N(n)$ через n.

М49◇2°. Убедитесь, что приводимая квадрика представляет собой либо объединение двух различных гиперплоскостей, либо одну «двойную» плоскость.

М49◇3 (теорема Лагранжа). Всякий однородный многочлен степени 2 с коэффициентами в любом поле, где $1+1 \neq 0$, можно линейной обратимой заменой координат преобразовать к виду $\sum a_i x_i^2$, причём в поле $\mathbb{R}$ можно ещё и сделать все a_i равными ± 1, а в поле $\mathbb{C}$ — единице.

М49◇4. Опишите все геометрически разные квадрики в $\mathbb{RP}_1$, $\mathbb{RP}_2$, $\mathbb{RP}_3$, $\mathbb{CP}_1$, $\mathbb{CP}_2$ и $\mathbb{CP}_3$.

М49◇5. Верно ли, что через любые 5 точек на $\mathbb{P}_2$ можно провести квадрику? Через сколько точек гарантированно проводится квадрика на $\mathbb{P}_3$?

М49◇6. Докажите, что взаимное расположение квадрики и прямой исчерпывается следующими взаимоисключающими возможностями: квадрика содержит прямую, квадрика пересекает прямую в единственной точке, квадрика пересекает прямую в 2 разных точках, квадрика не пересекает прямую (причём над полем $\mathbb{C}$ последний случай невозмжен).

М49◇7. Верно ли, что любые 3 прямые в $\mathbb{P}_3$ лежат на некоторой квадрике?

М49◇8. Какую фигуру заметяют все прямые, перескающие 3 заданных попарно скрещивающихся прямых в $\mathbb{P}_3$?

М49◇9*. Сколько прямых пересекает 4 данных попарно скрещивающихся прямых в пространстве? Опишите все возможные ответы и укажите, какие из них устойчивы по отношению к «малым шевелениям» данной четвёрки прямых.

М49◇10 (коника Веронезе). Рассмотрим двумерное пространство V всех линейных функций от t_0, t_1, взяв в нём $\{t_0, t_1\}$ за базис (так что координатами функции $f(t_0,t_1) = \alpha_0 t_0 + \alpha_1 t_1$ относительно этого базиса будут числа (α_0, α_1)) и трёхмерное пространство W всех однородных многочленов степени 2 от t_0, t_1, взяв в нём за базис $\{\, t_0^2 \,,\, 2\, t_0 t_1^2 \,,\, t_1^2 \,\}$ (так что координатами функции $q(t_0,t_1) = \beta_0 t_0^2 + 2\,\beta_1\, t_0 t_1 + \beta_2 t_1^2$ относительно этого базиса будут числа $(\beta_0, \beta_1, \beta_2)$). Рассмотрим теперь проективизации этих пространств $\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}(V)$ и $\mathbb{P}_2 = \mathbb{P}(W)$ (иначе говоря, рассмотрим $\mathbb{P}_2$, являющееся пространством квадрик на данном $\mathbb{P}_1$). Отображение Веронезе $\mathbb{P}_1 \longrightarrow \mathbb{P}_2$ переводит линейную функцию f в f^2. Убедитесь, что отображение Веронезе устанавливает биекцию между $\mathbb{P}_1$ и некоторой неприводимой коникой $C \subset \mathbb{P}_2$. Задайте C

а) явным однородным уравнением $f(\beta_0, \beta_1, \beta_2) = 0$

б) явными параметрическими уравнениями $\beta_i = \varphi_i(\alpha_0, \alpha_1)$, $i = 0, 1, 2$.

М49◇11. Всякая ли неприводимая коника $C \subset \mathbb{P}_2$ допускает рациональную параметризацию, т. е. 3 взаимно простых однороднородных многочлена $\varphi_i(\alpha_0, \alpha_1)$, $i = 0, 1, 2$, степени 2, таких что отображение $\mathbb{P}_1 \xrightarrow{(\alpha_0:\alpha_1)\mapsto(\varphi_0(\alpha_0,\alpha_1):\varphi_1(\alpha_0,\alpha_1):\varphi_2(\alpha_0,\alpha_1))} \mathbb{P}_2$ является биекцией между $\mathbb{P}_1$ и C?

М49◇12. Докажите, что 2 неприводимых коники либо совпадают либо пересекаются по $\leqslant 4$ точкам (причём над $\mathbb{C}$ всегда имеется ровно 4 точки пересечения с учётом кратности).

М49◇13. Пусть никакие 3 из 5 точек зад. М49◇5 не коллинеарны. Верно ли, что проходящая через них коника единственна и неприводима?