Аффинные координаты на проективном пространстве

Однородные и аффинные координаты. Рассмотрим на $\mathbb{P}_n$ аффинную карту U_α, заданную в $\mathbb{R}^{n+1}$ уравнением $\alpha(x) = 1$, где $\mathbb{R}^{n+1} \xrightarrow{\alpha} \mathbb{R}$ некоторая *линейная* функция[1]. Точка $x \in \mathbb{P}_n$ попадает в U_α, если и только если её однородные координаты $(x_0 : x_1 : \dots : x_n)$ удовлетворяют условию $\alpha(x_0, x_1, \dots, x_n) \neq 0$, и изображается в U_α точкой $(y_0, y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ с координатами[2] $y_i = x_i/\alpha(x_0, x_1, \dots, x_n)$. Для любых n линейных функций $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n : \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}$, составляющих вместе с функцией α линейно независимую систему из $(n+1)$ линейных функций на $\mathbb{R}^n$, набор из n чисел $\xi_i(y)$, $i = 1, 2, \dots, n$ называется *аффинными координатами* точки $x \in U_\alpha$ в системе $\{\xi_i\}$. Подчеркнём, что выбор аффинных координат в данной аффинной карте во-первых сильно произволен, а во-вторых зависит от карты — в другой карте U_β линейные функции ξ_i уже могут не сгодиться, а если даже и сгодятся, то координатами точки $(x_0 : x_1 : \dots : x_n)$ будут уже не $\xi_i(y)$, где $y_\nu = x_\nu/\alpha(x)$, а $\xi_i(z)$, где $z_\nu = x_\nu/b(x)$.

Пример: рассмотрим на $\mathbb{P}_1$ с однородными координатами $(x_0 : x_1)$ карту U_{x_0}, состоящую из всех прямых, пересекающих прямую $x_0 = 1$. Тут $\alpha(x_0, x_1) = x_0$, и в качестве аффинной координаты годится любая функция ξ, непропорциональная x_0, скажем $\xi(x_0, x_1) = x_1$. Тогда, к примеру, точка $P = (5 : 2)$ будет иметь аффинную координату $\xi = 2/5$. В карте U_{x_1}, где $x_1 = 1$, функция ξ не годится в качестве аффинной координаты; там в качестве аффинной координаты подойдёт, скажем, функция $\eta(x_0, x_1) = x_0$, и та же самая точка P получит координату $\eta = 5/2$. А вот линейная функция $\zeta(x_0, x_1) = x_0 + x_1$ годится в качестве аффинной координаты в обеих картах U_{x_0} и U_{x_1}; при этом в первой карте точка P будет иметь координату $\zeta = 1 + 2/5 = 7/5$, а во второй — координату $\zeta = 5/2 + 1 = 7/2$.

М48◇1°. На $\mathbb{P}_2$ с однородными координатами $(t_0 : t_1 : t_2)$ найдите аффинные координаты (x, y) точек $p = (1 : -2 : 3)$, $q = (-2 : 0 : 5)$ и $r = (0 : 4 : -3)$ в карте U_α для всех допустимых сочетаний $\{\alpha, x, y\}$ из списков: $\alpha = t_1$, $\alpha = t_1 + t_2$, $\alpha = t_1 + t_2 + t_3$; $x = t_0$, $x = t_0 - t_2$, $x = t_0 + t_1$; $y = t_2$, $y = t_0 + t_2$, $y = t_1 + t_2 + t_3$.

М48◇2. Рассмотрим на $\mathbb{P}_2$ с однородными координатами $(t_0 : t_1 : t_2)$ фигуру, заданную уравнением $t_0^2 = t_1^2 + t_2^2$. Убедитесь, что это определение корректно (т. е. при замене набора однородных координат на пропорциональный свойство точки принадлежать этой фигуре сохраняется) и нарисуйте, как выглядит эта фигура в аффинных картах: **а)** U_{t_0}, **б)** U_{t_1}, **в)** $U_{t_0 - t_1}$. В каждом из случаев задайте соответствующую фигуру явным уравнением в аффинных координатах (x, y) взяв в качестве таковых $x = t_1$, $y = t_2$ в (а), $x = t_0$, $y = t_2$ в (б), и $x = t_0 + t_1$, $y = t_2$ в (в).

М48◇3. Верно ли, что всякая фигура, заданная в $\mathbb{R}^n$ уравнением $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$, где f — произвольный многочлен степени d, является изображением в аффинной карте U_{x_0} некоторой фигуры, заданной в $\mathbb{P}^n$ уравнением $\widehat{f}(x_0, x_1, \dots, x_n) = 0$, где $\widehat{f}$ — однородный многочлен степени d, из которого f получатся подстановкой $x_0 = 1$?

М48◇4. Кривая на $\mathbb{P}_2$ с однородными координатами $(t_0 : t_1 : t_2)$ имеет в аффинной карте U_{t_0} аффинное уравнение **а)** $y = x^2$ **б)** $y = x^3$ **в)** $y^2 + (x-1)^2 = 1$ **г)** $y^2 = x^2(x+1)$ (в системе координат $x = t_1$, $y = t_2$). Напишите для неё однородное уравнение и аффинные уравнения в двух других картах U_{t_1}. U_{t_2}. Нарисуйте все эти 12 аффинных кривых.

М48◇5*. Вложим $\mathbb{R}^2$ в комплексную плоскость $\mathbb{C}^2$ (как множество точек с действительными координатами), а $\mathbb{C}^2$ — в комплексную проективную плоскость $\mathbb{CP}_2$ в качестве карты U_{t_0}. Найдите на $\mathbb{CP}_2$ две точки, через которые проходят все кривые, видные в исходном $\mathbb{R}^2$ как окружности. Верно ли, что любая кривая, заданная в $\mathbb{CP}_2$ однородным неприводимым многочленом степени 2 с вещественными коэффициентами, проходящая через найденные Вами 2 точки и имеющая непустое пересечение с исходным $\mathbb{R}^2$, видна в нём как окружность?

---

[1]отметьте, что любую не содержащую начало координат гиперплоскость $\mathbb{R}^{n+1}$ можно задать таким уравнением
[2]проверьте, что это единственный вектор, пропорциональный x и удовлетворяющий уравнению $\alpha(y) = 1$