Линейность, аффинность и барицентрические координаты.

M47◇1. Астрономы считают, что все галактики разлетаются прямолинейно по направлениям от нашей со скоростями, пропорциональными расстояниям до них. Означает ли это, что наша галактика — центр вселенной?

M47◇2. Крючок безмена заменили на более тяжёлый и одновременно параллельно сдвинули вниз шкалу, так чтобы нуль совпал с новым положением стрелки. Будет ли безмен после этого правильно измерять вес?

Определения. Функция $\mathbb{R}^m \xrightarrow{f} \mathbb{R}^n$ называется *линейной*, если для всех $x \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^n$ и $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ выполняется равенство[1] $f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)$. Функция $\mathbb{R}^m \xrightarrow{g} \mathbb{R}^n$ называется *аффинной*, если существует $a \in \mathbb{R}^m$, такое что функция $x \longmapsto g(x+a) - g(a)$ линейна.

M47◇3°. Какие из функций $f(x) = 2x + 3$, $f(x) = -3x$, $f(x) = x^2$, $f(x_1, x_2) = 2x_1 + 3x_2$, $f(x_1, x_2) = -3(x_1 - x_2)$, $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2 + 1$ **а)** аффинны? **б)** линейны?

M47◇4. Пусть линейная функция $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R}^2$ переводит базисные векторы $e_1 = (1, 0)$ и $e_2 = (0, 1)$ в векторы (a, c) и (b, d) соответственно. Куда она переведёт вектор (x, y)?

M47◇5. Опишите все линейные и все аффинные функции

а) $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^1$ **б)** $\mathbb{R}^1 \longrightarrow \mathbb{R}^n$ **в)** $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ **г*)** $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$

M47◇6. Изменим в определении аффинной функции фразу «существует $a \in \mathbb{R}^m$» на фразу «для любого $a \in \mathbb{R}^m$». Будет ли новое определение эквивалентно исходному?

Центр тяжести точек $P_1, P_2, \ldots, P_s$ с весами $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$ — это такая точка O, что $\sum\limits_{\nu=1}^{s} \lambda_\nu \cdot \overrightarrow{OP_\nu} = \overrightarrow{0}$.

M47◇7 (теорема о центре тяжести). Докажите, что у любого конечного набора точек с произвольными вещественными весами существует единственный центр тяжести.

M47◇8 (теорема о группировании масс). Пусть $P_1, P_2, \ldots, P_s$ и $Q_1, Q_2, \ldots, Q_r$ — два (возможно, пересекающихся) набора точек с весами $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$ и $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_r$, а P_0 и Q_0 — их центры тяжести. Совпадает ли центр тяжести объединения этих двух наборов (у точек, входящих в оба набора, следует сложить их веса) с центром тяжести системы из двух точек P_0 и Q_0, взятых с весами $\lambda_0 = \sum \lambda_\nu$ и $\mu_0 = \sum \mu_\nu$?

M47◇9 (теорема о медианах). Медианой системы точек называется отрезок, соединяющий одну из них с центром тяжести остальных, взятых с весом 1. Верно ли, что все медианы данного набора точек пересекаются в одной точке и делятся ею в одинаковом отношении? Если да, то чему оно равно?

M47◇10 (барицентрические координаты). Дан $\triangle ABC$. Докажите, что $\forall$ точки P $\exists$ единственный набор весов[2] (α, β, γ) с суммой $\alpha + \beta + \gamma = 1$, такой что центр тяжести точек A, B, C, взятых с весами α, β, γ, находится в P. Нарисуйте ГМТ барицентрические координаты которых относительно равностороннего треугольника удовлетворяют соотношению:

а) $\alpha = 0$ **б)** $\alpha + \beta = 0$ **в)** $\alpha + \beta < 0$ **г)** $2\alpha > 3\beta$ **д)** $\alpha \leqslant \beta + \gamma$ **е*)** $\alpha^2 + \beta^2 = \gamma^2$

M47◇11. Рассмотрим на $\mathbb{P}_2$ любую аффинную карту U, на которой видны все три точки X, Y, Z, отвечающие координатным осям в $\mathbb{R}^3$. Пусть $P \in U$ произвольная точка, отвечающая прямой с направляющим вектором $v \in \mathbb{R}^3$. Как связаны декартовы координаты вектора v в $\mathbb{R}^3$ с барицентрическими координатами точки P относительно $\triangle XYZ$ в U?

M47◇12. Верно ли, что функция $\mathbb{R}^m \xrightarrow{g} \mathbb{R}^n$ аффинна тогда и только тогда, когда для любых точек $x_1, x_2, \ldots, x_s$ и любых чисел $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$ с суммой $\sum \lambda_\nu = 1$ выполняется равенство $g\left(\sum\limits_{\nu=1}^{s} \lambda_\nu x_\nu\right) = \sum\limits_{\nu=1}^{s} \lambda_\nu g(x_\nu)$?

---

[1] $\lambda(x_1, x_2, \ldots, x_m) \stackrel{\text{def}}{=} (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_m)$ и $(a_1, a_2, \ldots, a_m) + (b_1, b_2, \ldots, b_m) \stackrel{\text{def}}{=} (a_1 + b_1,\ a_2 + b_2,\ \ldots,\ a_m + b_m)$

[2] он называется *барицентрическими координатами* точки P относительно $\triangle ABC$