Ориентированный объём и линейные уравнения

Ориентированный объём. Ориентированная площадь — это функция $\sigma(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2})$, сопоставляющая паре векторов на плоскости площадь натянутого на них параллелограмма, взятую со знаком «+», если вращение от v_1 к v_2 (в пределах параллелограмма) происходит против часовой стрелки. Ориентированный объём — это функция $\omega(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3})$, сопоставляющая тройке векторов в пространстве объём натянутого на них параллелепипеда, взятый со знаком «+», если вращение от v_1 к v_2 (в пределах натянутой на них грани) происходит против часовой стрелки, если глядеть из конца вектора $\overrightarrow{v_3}$.

М46◇1°. Убедитесь, что функции σ и ω обладают следующими свойствами:

а) $\lambda \cdot \omega(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}) = \omega(\lambda \cdot \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}) = \omega(\overrightarrow{v_1}, \lambda \cdot \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}) = \omega(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \lambda \cdot \overrightarrow{v_3})$ и аналогично для σ;

б) если к любому из аргументов прибавить любой *другой*, умноженный на произвольное число, значение площади и объёма не изменяется;

в) $\omega(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}) = \sigma(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}) = 1$ для стандартных единичных ортогональных базисных векторов.

М46◇2. Верно ли, что любая функция от векторов, обладающая первыми двумя свойствами из предыдущей задачи, обязательно

а) меняет знак при перемене местами любых двух аргументов;

б) обращается в нуль, если какие-то два аргумента совпадают;

в) обращается в нуль, если один из аргументов линейно выражается через другие;

г) линейна по каждому из аргументов, т. е. $\omega(\dots, \lambda\cdot\overrightarrow{v} + \mu\cdot\overrightarrow{w}, \dots) = \lambda\cdot\omega(\dots, \overrightarrow{v}, \dots) + \mu\cdot\omega(\dots, \overrightarrow{w}, \dots)$ (обозначенные многоточиями аргументы фиксированы);

д) однозначно определяется своим значением на любом наборе линейно независимых векторов?

М46◇3. Докажите, что функции σ и ω, обладающие всеми тремя свойствами из зад. М46◇1, существуют и единственны. Напишите их явные выражения через координаты векторов-аргументов в стандартном базисе.

М46◇4. Опишите **а)** на плоскости **б)** в пространстве ГМТ P таких, что скалярное произведение $\overrightarrow{OP}$ с данным фиксированным вектором $\overrightarrow{ON}$ равно данному числу d (тут O — фиксированная точка, скажем, начало координат).

М46◇5. Убедитесь, что любая плоскость в $\mathbb{R}^3$ задаётся уравнением вида $ax + by + cz = d$. Укажите координаты какого-либо вектора, перпендикулярного такой плоскости и найдите расстояние от неё до начала координат.

М46◇6. Даны три вектора $\overrightarrow{v_1} = (a_1, b_1, c_1)$, $\overrightarrow{v_2} = (a_2, b_2, c_2)$ и $\overrightarrow{v_3} = (a_3, b_3, c_3)$. Как соотносятся между собою условия: **а)** $\omega(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}) = 0$; **б)** $\exists\overrightarrow{n} : \overrightarrow{v_1}\cdot\overrightarrow{n} = \overrightarrow{v_2}\cdot\overrightarrow{n} = \overrightarrow{v_3}\cdot\overrightarrow{n} = 0$;
в) $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$, $\overrightarrow{v_3}$ компланарны; **г)** $a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_2b_1c_3 - a_1b_3c_2 - a_3b_2c_1 = 0$;

д) система линейных уравнений $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z = 0 \\ a_3x + b_3y + c_3z = 0 \end{cases}$ имеет решение $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$.

М46◇7. Напишите координаты вектора, перпендикулярного двум произвольно заданным векторам (a_1, b_1, c_1) и (a_2, b_2, c_2).

М46◇8*. Пусть $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ движение, оставляющее на месте начало координат. Докажите, что $F(\lambda\overrightarrow{v} + \mu\overrightarrow{w}) = \lambda F(\overrightarrow{v}) + \mu F(\overrightarrow{w})$ и что уравнение $F(\overrightarrow{v}) = t\cdot\overrightarrow{v}$ на вектор $\overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^3$ имеет при некотором $t \in \mathbb{R}$ ненулевое решение.

М46◇9* (теорема Эйлера). Докажите, что всякое движение $\mathbb{R}^3$ является композицией параллельного переноса, поворота вокруг некоторой прямой и, возможно, центральной симметрии.