Серии независимых испытаний

М45◇1. Двое бросают монету — один 10 раз, другой — 11. Какова вероятность того, что у второго орлов выпало больше, чем у первого?

Случайные величины. Числовые функции на пространстве элементарных событий Ω называются *случайными величинами*. Пусть Ω состоит из не более чем счётного множества занумерованных точек, которым приписаны вероятности $p_1, p_2, p_3, \ldots$ Если случайная величина ξ принимает в i-той точке значение ξ_i, то сумма $\mathsf{M}[\xi] \overset{\text{def}}{=} \sum\limits_i \xi_i p_i$ называется *средним значением* или *математическим ожиданием* ξ. Среднее значение случайной величины $(\xi - \mathsf{M}[\xi])^2$ называется *дисперсией* ξ и обозначается $\mathsf{D}[\xi]$.

М45◇2. Найдите среднее значение и дисперсию суммы выпавших очков при 3 подбрасываниях игральной кости.

М45◇3. Каждый из двух игроков пишет на бумажке число 1 или 2, потом бумажки одновременно открывают. Если числа совпали, то первый платит второму написанное на бумажке число рублей, если нет — второй платит первому a рублей. При каком a игра будет честной, в том смысле, что среднй выигрыш обоих играков нулевой?

М45◇4. Человек, имеющий n ключей, хочет отпереть свою дверь, независимо пробуя 1 ключ в секунду в случайном порядке. Сколько он в среднем провозится, если неподошедшие ключи
а) исключаюся из связки **б)** продолжают пробоваться?

М45◇5. Вася и Петя попадают мячом в кольцо с вероятностями 0.45 и 0.55. При каком количестве пар бросков Вася имеет наибольшие шансы выигать у Пети?

М45◇6. Найдите матожидание и дисперсию числа гербов при n подбрасываниях монеты.

М45◇7. Справедливы ли для произвольной случайной величины ξ соотношения:
а) $\mathsf{D}[\xi] = \mathsf{M}[\xi^2] - \mathsf{M}^2[\xi]$ **б) (неравенство Чебышева)** $\mathsf{P}\Big(\big|\xi - \mathsf{M}[\xi]\big| \geqslant \alpha\Big) \leqslant \dfrac{\mathsf{D}[\xi]}{\alpha^2} \quad \forall\, \alpha > 0.$

М45◇8*. Банк казино равен миллиону долларов. Игрок бросает монету, пока не выпадет герб. Если это происходит при k-том броске, он получает 2^k долларов, или весь банк, если $2^k \geqslant 10^6$. При какой входной плате такая игра выгодна казино? Что будет, если банк не ограничен?

М45◇9*. Пачка жевачки содержит один из n разных, но равновероятных вкладышей. Сколько пачек нужно в среднем купить, чтобы собрать полную коллекцию вкладышей?

М45◇10 (схема Бернулли). Производится серия из n одинаковых независимых опытов, каждый из которых завершается «успехом» с вероятностью p или «неудачей» с вероятностью $q = 1 - p$. Обозначим через β_n общее число успехов в серии. Найдите: **а)** $\mathsf{P}(\beta_n = k)$ **б)** $\mathsf{M}[\beta_n]$
в) $\mathsf{D}[\beta_n]$ **г) (закон больших чисел)** $\lim\limits_{n\to\infty} \mathsf{P}\left(\left|\dfrac{\beta_n}{n} - p\right| < \varepsilon\right)$ (при произвольном $\varepsilon > 0$).

М45◇11 (закон Пуассона). Пусть в схеме Бернулли $n \to \infty$, и одновременно $p \to 0$ так, что $np \to \lambda > 0$. Для каждого целого $k \geqslant 0$ найдите $\lim\limits_{n\to\infty} \mathsf{P}(\beta_n = k)$.

М45◇12. Вам годится любой из двух трамваев, ходящих со средними интервалами в 10 и в 15 минут. С каким средним интервалом Вы можете уехать?

М45◇13*. На АТС по одному поступают независимые вызовы с постоянной (мгновенной) скоростью λ шт./мин. Каковы вероятности прихода ровно k вызовов за минуту и того, что первого вызова придётся ждать $\leqslant t$ минут? Найдите матожидание и дисперсию
а) числа вызовов приходящих в минуту **б*)** времени ожидания очередного вызова.

М45◇14*. При $2n$ подбрасываниях монеты выпало k гербов. Для произвольно заданной пары чисел $a < b$ сравните $\int\limits_a^b e^{-x^2/2}dx$ с пределом $\lim\limits_{n\to\infty} \mathsf{P}\big(a \cdot \sqrt{n/2} < k - n < b \cdot \sqrt{n/2}\big)$.

ПОДСКАЗКА: $\beta_{n+\nu} \simeq \beta_n e^{-\nu^2/n}$ при $n \gg 0$ и фиксированном ν.