Случайные блуждания

Описание явления. Некая фишка движется по множеству точек с целыми координатами в $\mathbb{R}^n$ раз в секунду случайно изменяя на ±1 значение одной из своих координат (все $2n$ возможных при этом сдвигов считаются равновероятными). Этот процесс при $n = 1, 2, 3, \ldots$ называется *случайным блужданием* по прямой, плоскости, пространству … . При этом *график траектории*, показывающий зависимость положения фишки от времени, представляет собою ломаную линию с вершинами в целых точках $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ (первое $\mathbb{R}$ — это ось времени), все рёбра которой наклонены к оси времени под углом 45° и могут поворачивать только на 90°.

M$45\frac{1}{2}$◇1 (принцип отражения). Рассмотрим графики траекторий случайного блуждания *по прямой* (это ломаные на плоскости $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$). Выясните:

а) сколько разных траекторий ведут из $(0,0)$ в (t,x) с $t \geqslant x \geqslant 0$

б) как связаны траектории, не пересекающие ось времени и ведущие из $(0,x)$ в (t,y), где $x, y > 0$, с произвольными траекториями, ведущими из $(0,-x)$ в (t,y)

в) сколько не пересекающих ось времени траекторий ведут из $(0,0)$ в (t,x) с $t \geqslant x \geqslant 0$

г) сколько всего имеется выходящих из начала координат и не пересекающих ось времени траекторий над $[0,t]$.

M$45\frac{1}{2}$◇2 (задача о лидерстве – 1). В серии подбрасываний монеты выпало a орлов и $b < a$ решек. Какова вероятность того, что орлов было больше на протяжении всей серии?

M$45\frac{1}{2}$◇3 (блуждание по прямой). Пусть фишка блуждает по прямой, стартовав в момент $t = 0$ из точки $x = 0$. Обозначим через u_{2t} и f_{2t} вероятности того, что через $2t$ секунд фишка, соответственно, вернётся и *впервые* вернётся в $x = 0$. Докажите, что $u_{2t} = \sum\limits_{k=1}^{t} f_{2k}u_{2t-2k}$ и явно выразите: **а)** f_{2t} через u_{2t} и u_{2t-2} **б)** u_{2t} через t.

M$45\frac{1}{2}$◇4 (возвратность и транзитивность). Верно ли, что при случайном блуждании по прямой фишка с вероятностью 1 рано или поздно: **а)** вернётся в стартовое положение?

б) побывает в любой наперёд заданной точке?

M$45\frac{1}{2}$◇5. Найдите u_{2t} для блуждания на плоскости и в пространстве.

M$45\frac{1}{2}$◇6*. Будет ли возвратным (в смысле зад. M$45\frac{1}{2}$◇4 (а)) случайное блуждание

а) на плоскости **б)** в пространстве?

M$45\frac{1}{2}$◇7 (задача о разорении). Игрок с капиталом \$$n$ играет, пока не разорится, в орлянку против казино с неограниченным капиталом (за орла он получает \$1, за решку — платит).

а) Найдите вероятность того, что игра продлится ровно m бросаний.

б) Какова вероятность того, что игра никогда не кончится?

в*) Конечна ли средняя продолжительность игры?

M$45\frac{1}{2}$◇8 (задача о лидерстве – 2). Монету подбросили $2n$ раз. Докажите, что вероятности того, что в последний раз число орлов сравнялось с числом решек на $2k$-м подбрасывании, и того, что ровно после $2k$ из $2n$ подбрасываний суммарное число выпавших орлов превышало суммарное число решек, равны числу $\alpha_{2k,2n} \overset{\text{def}}{=} u_{2k}u_{2(n-k)}$.

M$45\frac{1}{2}$◇9* (закон арксинуса). Докажите, что $\forall\, x \in (0,1)$ вероятность того, что при n подбрасываниях монеты суммарное число орлов превышало суммарное число решек после не более чем xn из этих n подбрасываний, стремится при $n \to \infty$ к $\dfrac{2}{\pi}\arcsin\sqrt{x}$.

ПОДСКАЗКА: покажите, что $u_{2n} \simeq c/\sqrt{n}$ при $n \gg 0$ (где $c = \text{const}$) и, как и в зад. M45◇14, сравните $\sum\limits_{0\leqslant k\leqslant xn} \alpha_{2k,2n}$ со ступенчатым приближением к $\int\limits_0^x \dfrac{dt}{\sqrt{t(1-t)}}$; причём c тоже можно найти, вычислив интеграл!