Вычисление вероятностей

M44◇1. Палку случайным образом ломают на 3 части. Какова вероятность того, что из этих частей можно сложить треугольник?

M44◇2 (задача Бюффона). На плоскость, разлинованную параллельными прямыми, находящимися на расстоянии a друг от друга, случайно брошена игла длиной $\lambda < a$. Найдите вероятность пересечения иглы с какой-нибудь прямой.

M44◇3. Абсолютно неупругую монету радиуса r и толщины d бросают на абсолютно неупругую горизонтальную поверхность. Какова вероятность того, что монета упадет на ребро?

M44◇4. В урне m черных и n белых шаров. Какова вероятность того, что из μ наугад вынутых из урны шаров будет ровно ν белых, при условии, что каждый вынутый шар
а) сразу же возвращают **б)** больше не возвращают обратно в урну?

M44◇5. Борясь с ростом населения, но уважая традиции, китайцы, если первый ребёнок в семье — мальчик, больше не позволяют этой семье иметь детей; если же первый ребёнок — девочка, семье разрешают завести еще ровно одного ребёнка. Какое отношение численностей мужчин и женщин при этом установится, если рождения мальчика и девочки равновероятны?

M44◇6. Ведущий телеигры предлагает участнику угадать, за какой из трёх закрытых дверей находится автомобиль. Тот наугад выбрал одну из дверей, после чего ведущий открыл ту из двух оставшихся дверей, где точно нет автомобиля, и предложил игроку вновь сделать, теперь уже окончательный, выбор между двумя закрытыми дверями. Как быть?

M44◇7. Как при помощи одной монеты бросить жребий на троих?

M44◇8 (вред подхалимства). Жюри из трех человек выносит решение большинством голосов. Председатель и второй член жюри принимают правильные решения независимо с вероятностями $0,7$ и $0,9$, а третий — бросает монету. Как изменится вероятность выноса жюри правильного решения, если третий станет копировать решения председателя?

M44◇9. На экзаменационном столе лежат 30 разных билетов, студенты по очереди берут их, и взятые белеты на стол не возвращаются. Каким в очереди Вам выгоднее всего быть, если Вы знаете ровно 3 билета из 30?

Стохастическая зависимость. События A и B называются *независимыми*, если $\mathsf{P}(A \cap B) = \mathsf{P}(A)\mathsf{P}(B)$ (при $\mathsf{P}(B) \neq 0$ это равносильно равенству $\mathsf{P}(A|B) = \mathsf{P}(A)$, а при $\mathsf{P}(A) \neq 0$ — равенству $\mathsf{P}(B|A) = \mathsf{P}(B)$). Подчеркнём, что речь идёт о *стохастической*, а не о *причинно-следственной* зависимости.

M44◇10. Предполагая, что мальчики и девочки родятся независимо и равновероятно, выясните, зависимы ли события: «в семье не более одной девочки» и «в семье есть дети обоих полов»
а) в семьях с двумя **б)** в семьях с тремя **в)** в семьях с четырьмя детьми.

M44◇11*. A, B, C попарно независимы. Верно ли, что $\mathsf{P}(A \cap B \cap C) = \mathsf{P}(A)\mathsf{P}(B)\mathsf{P}(C)$? А если все попарные и тройное пересечения имеют ненулевую вероятность?

M44◇12*. Датчик выдаёт числа из какого-то конечного набора, каждое — со своей определенной вероятностью. Скажем, что один датчик больше другого, если с вероятностью $> 1/2$ он выдаёт большее число. Есть ли датчики A, B и C, такие что $A > B > C > A$?

M44◇13* (синица и журавль). Вам в случайном порядке показывают 100 заранее неизвестных попарно разных денежных сумм, пока Вы не заберёте показываемую Вам сумму. Сможете ли Вы забрать максимальную с вероятностью $> 1/3$?

M44◇14*. У n пассажиров n-местного самолета посадочные таллоны на разные места. Первой входит сумасшедшая старушка и садится куда попало. Каждый следующий входящий занимает своё место, если оно свободно, иначе тоже садился куда попало. Сколь вероятно, что последний сядет на свое место?