События и вероятности

Конфигурационные пространства. Математическая модель любого явления *реальной* жизни начинается с разделения явления на «элементарные составляющие», которые изображаются точками некоторого пространства, называемого в теории вероятностей *пространством элементарных событий*, в физике — *конфигурационным пространством*, а в геометрии — *пространством модулей* явления. Например: результат бросания игральной кости удобно изображать точкой в 6-элементном множестве $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$; расположение двух поездов на трассе Москва – Санкт-Петербург — точкой квадрата (координаты точки — расстояния от поездов до Москвы); вращения $\mathbb{R}^3$, оставляющие на месте начало координат, изображаются точками пространства $\mathbb{RP}_3$.

М43◇1. Из пункта A в пункт B идут 2 дороги, причём 2 машины, связанные 10-метровой верёвкой могут проехать из A в B, двигаясь каждая по своей дороге. Смогут ли разъехаться 2 идущих по разным дорогам навстречу другу воза сена шестиметровых радиусов?

М43◇2. В течение часа к железнодорожной станции в случайные моменты времени подходят 2 поезда. Какова вероятность того, что удастся перебежать из поезда в поезд не ожидая на платформе, если оба стоят по 5 минут?

М43◇3*. Каждая из 7 одинаковых банок на $9/10$ заполнена краской одного из 7 неповторяющихся цветов радуги. Можно ли, переливая краску из банки в банку и равномерно перемешивая содержимое, получить в одной из банок колер, в котором все 7 цветов смешаны в равной пропорции? (Утешительная версия: 2, 3 или 4 банки, заполненные на $4/5$.)

Вероятности. Математическая теория вероятностей имеет дело с конфигурационным пространством Ω, на котором задана *мера*, сопоставляющая некоторым подмножествам $A \subset \Omega$ (называемым *событиями*), число $\mathsf{P}(A) \in [0, 1]$, называемое *вероятностью* A и измеряющее долю элементарных исходов, составляющих A, среди всех элементарных исходов Ω. Таковой мерой может служить, например, число взятых с некоторыми весами элементов в A, или отношение площади A к площади Ω. Требуется, чтобы $\mathsf{P}(\Omega) = 1$, $\mathsf{P}(A_1 \cup A_2) = \mathsf{P}(A_1) + \mathsf{P}(A_2)$, если $A_1 \cap A_2 = \varnothing$, и чтобы измеримость A и B влекла за собой измеримость $A \cap B$, $A \cup B$ и $A \setminus B$.

М43◇4. Какова вероятность того, что при 3 бросаниях игральной кости выпадет
а) 3 шестёрки **б)** хоть одна шестёрка **в)** ни одной шестёрки **г)** чётная сумма очков.

М43◇5. Из 54-карточной колоды ($13 \times 4 + 2$ джокера[1]) вытаскивают 5 карт. Какова вероятность того, что среди них окажется **а)** 5 карт одной масти и идущих подряд достоинств
б) то же, но, возможно, разной масти **в)** ровно 4 карты одинакового достоинства
г) 5 карт одинаковой масти **д)** ровно 2 пары карт одинаковых достоинства
е) тройка и двойка карт одинакового достоинства **ж)** 5 карт одинакового достоинства

М43◇6. При каком минимальном числе учеников в классе совпадающие дни рождения будут с вероятностью $> 1/2$?

М43◇7. Пусть A и B — два события, и $A \cap B$ — их одновременное наступление. Обозначим через $\mathsf{P}(A|B)$ вероятность наступления A, при условии, что имеет место B (т. е. долю $A \cap B$ внутри B). Верно ли, что $\mathsf{P}(A|B)\mathsf{P}(B) = \mathsf{P}(A \cap B) = \mathsf{P}(B|A)\mathsf{P}(A)$?

М43◇8. На вступительном экзамене профессор Дубарев опрашивает половину всех абитуриентов, равновероятно ставя 2, 3 и 4. Доцент Пеньков опрашивает треть абитуриентов и ставит половине из них 2, а остальным — поровну 4 и 5. Остальные абитуриенты попадают к ассистенту Добренькому, который четверти из них ставит троечку, а прочим — пятёрки. Какова вероятность сдать экзамен: **а)** на 2? **б)** на 3? **в)** не более, чем на 4?

М43◇9. Какова вероятность того, что не получивший 5 абитуриент имел дело:
а) с Добреньким? **б)** с Дубаревым? **в)** с Пеньковым?

[1] карта, номинал и масть которой игрок может выбрать по своему желанию