Проективные пространства.

***n*-мерное вещественное *проективное пространство* $\mathbb{RP}_n$** — это множество всех проходящих через начало координат прямых в $(n+1)$-мерном вещественном координатном пространстве $\mathbb{R}^{(n+1)}$. По определению, каждая такая прямая задаётся *направляющим вектором* $\overrightarrow{v} = (v_0, v_1, \ldots, v_n) \neq \overrightarrow{0}$ и состоит из всех точек $x \in \mathbb{R}^{(n+1)}$ вида $(t \cdot v_0, t \cdot v_1, \ldots, t \cdot v_n) = t \cdot \overrightarrow{v}$ с произвольными $t \in \mathbb{R}$. Таким образом, можно сказать, что точки $\mathbb{RP}_n$ суть ненулевые векторы из $\mathbb{R}^{(n+1)}$, рассматриваемые с точностью до пропорциональности. Чтобы наблюдать их в виде настоящих точек, надо разместить в $\mathbb{R}^{(n+1)}$ экран — любую n-мерную аффинную плоскость, не проходящую через нуль (см. рис. 42 - 1). Такие гиперплоскости называются *аффинными картами* на $\mathbb{RP}_n$. Всякая прямая, непараллельная аффинной карте, изобразится на этой карте обычной точкой, в которой карта пересекает рассматриваемую прямую. Никакая аффинная карта не покрывает $\mathbb{RP}_n$ целиком — все параллельные данной карте прямые (а они, очевидно, образуют проективное пространство $\mathbb{RP}_{n-1} \subset \mathbb{P}_n$) будут непокрыты. Этот непокрытый кусок называется *бесконечно удалённой* (относительно данной карты) проективной плоскостью. В результате, как множество, $\mathbb{RP}_n$ разбивается в дизъюнктное[1] объединение пространств:

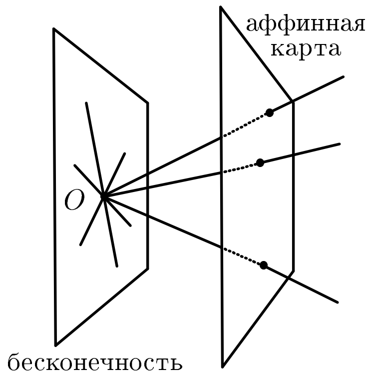

Рис. 42 - 1. Аффинная карта и бесконечно удалённое проективное подпространство.

$$\mathbb{P}_n = \mathbb{R}^n \sqcup \mathbb{P}_{n-1} = \mathbb{R}^n \sqcup \mathbb{R}^{n-1} \sqcup \mathbb{P}_{n-2} = \mathbb{R}^n \sqcup \mathbb{R}^{n-1} \sqcup \ldots \sqcup \mathbb{R}^0$$

в котором последнее $\mathbb{R}^0 = \mathbb{P}_0$ – это одна точка. На $\mathbb{RP}_n$ имеется естественная топология, в которой открытыми (соотв. замкнутыми) множествами являются множества, пересечение которые открытых с произвольной аффинной картой открыто (соотв. замкнуто) в этой карте.

М42◇1. Убедитесь, что $\mathbb{RP}_1$ гомеоморфна[2] окружности.

М42◇2. Лента Мёбиуса известным образом склеивается из прямоугольника. Опишите как склеить из прямоугольника $\mathbb{RP}_2$ (этот рецепт нельзя будет реализовать в $\mathbb{R}^3$ без самопересечений прямоугольника самого с собой, но сам рецепт существует и вполне определяет получающееся в результате топологическон пространство).

М42◇3. Граница ленты Мёбиуса гомеоморфна окружности. Верно ли, что если заклеить эту окружность диском, то получится $\mathbb{RP}_2$?

М42◇4. Являются ли аффинные карты открытыми подмножествами в $\mathbb{RP}_n$?

М42◇5*. Являются ли проективные пространства компактами (в том смысле, что они удовлетворяют условию Больцано - Вейерштрасса и/или из любого их покрытия открытыми множествами можно выбрать конечное подпокрытие)?

М42◇6*. Укажите на $\mathbb{RP}^2$ гладкую петлю $\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{RP}_2$, $\gamma(0) = \gamma(1)$, которая сама не может быть непрерывно стянута внутри $\mathbb{RP}_2$ в точку, но будучи пройденной дважды, становилась бы стягиваемой.

М42◇7*. Установите гомеоморфизм между $\mathbb{RP}_3$ и пространством SO_3, состоящем, по определению, из всевозможных поворотов $\mathbb{R}_3$ вокруг всевозможных осей, проходящих через начало координат[3] (заодно опишите топологию на SO_3).

---

[1] т. е. составленное их непересекающихся множеств

[2] гомеоморфизмом топологических пространств называется непрерывная в обе стороны биекция между ними, т. е. такая биекция при которой образ и прообраз любого открытого множества открыт

[3] на самом деле (трудная) *теорема Эйлера* утверждает, что SO_3 исчерпывает всю совокупность сохраняющих начало координат и ориентацию движений пространства $\mathbb{R}^3$