Дифференциальное исчисление

Напоминание. Дифференциал функции $f(x)$ в точке x_0 — это линейная функция от $(x - x_0)$, приближающая $f(x) - f(x_0)$ с погрешностью, которая при $x \to x_0$ стремится к нулю быстрее, чем $(x - x_0)$. Дифференциал обычно обозначают $df|_{x=x_0}$ или просто df. Будучи линейной функцией от $x - x_0$, дифференциал имеет вид $c(x_0) \cdot (x - x_0)$, где $c(x_0)$ — постоянный коэффициент (свой для каждой точки x_0). Поэтому часто пишут $df|_{x=x_0} = c(x_0)\,dx$, ибо $dx|_{x=x_0} = (x - x_0)\ \forall\, x_0$. Опыт показывает, что найти линейную часть приращения неизвестной функции проще, чем саму функцию, так что при отыскании функций, описывающих те или иные явления природы, обычно сначала находят соотношения на их дифференциалы, а потом уже — при помощи интегрирования — сами функции.

М41◇1. Прирост численности недавно обнаруженных жутких космических зубастиков пропорционален числу всевозможных их пар. По данным голливудской обсерватории, за прошедший год поголовье зубастиков удвоилось. Как скоро их станет бесконечно много? Смогли бы они бесконечно размножиться за конечное время, кабы их прирост был пропорционален их численности?

М41◇2. Скорость радиоактивного распада пропорциональна имеющемуся количеству активного вещества; через какое время распадётся $3/4$ вещества с периодом полураспада 1 год?

М41◇3. За какое время вытечет вся вода из полного **а)** вертикального **б)** горизонтального цилиндрического бака $\varnothing\, 1,8\,\text{м}$ длиной $2,45\,\text{м}$ через круглую $\varnothing\, 6\,\text{см}$ дырку в дне?

М41◇4. С какой силой должен тянуть теплоход за канат, делающий 3 оборота вокруг причального столба диаметра $40\,\text{см}$ (коэффициент трения $1/3$), чтобы его не смог удержать причальный рабочий, тянущий за другой конец каната с силой $10\,\text{кг}$?

М41◇5. На десятиградусном морозе чашка кипятку за полчаса остыла до $20°$. В какой момент её температура была $40°$?

М41◇6 (формула Циолковского). Какой скорости достигнет ракета массы m после отработки всего топлива массы M? Скорость истечения топлива v, никаких внешних сил нет.

М41◇7 (объём тела вращения). Функция f неотрицательна и непрерывно дифференцируема на $[0, a)$. Обозначим через $V(t)$ объём тела, заметаемого областью $0 \leqslant x \leqslant t$, $0 \leqslant y \leqslant f(x)$ при её вращении вокруг оси OX. Вычислите дифференциал $dV|_{t=x}$ и найдите $V(t)$.

Указание. Сравните приращение объёма в точке x с объёмом цилиндра радиуса $f(x)$.

М41◇8 (площадь поверхности тела вращения). В условиях зад. М41◇7 обозначим через $S(t)$ площадь боковой поверхности того же самого тела вращения. Вычислите дифференциал $dS|_{t=x}$ и найдите $S(t)$.

Указание. Сравните приращение площади с площадью боковой поверхности соприкасающегося конуса (а площадь последней легко подсчитать развернув её на плоскости).

М41◇9. Выразите через радиусы оснований и высоту объём и площадь поверхности усечённого прямого кругового: **а)** конуса **б)** параболоида **в)** гиперболоида.

М41◇10. Выразите объём и площадь поверхности шара через радиус.

М41◇11. Конечны ли: **а)** объём **б)** площадь поверхности фигуры $x^2 \geqslant y^2 + z^2$, $x \geqslant 1$?

М41◇12 (теорема Архимеда). Вычислите площадь поверхности пояса сферы, заключенного между двумя параллельными плоскостями, и убедитесь, что он зависит лишь от расстояния между плоскостями, но не от расстояния от них до центра сферы.

М41◇13* (плоскость Лобачевского). Из оптики известно, что синус угла, образуемого лучом света с нормалью к границе, разделяющей разные среды, обратно пропорционален показателям преломления этих сред: $n_1 \sin\alpha_1 = n_2 \sin\alpha_2$, где n_1, n_2 — показатели преломления, а α_1, α_2 — соответствующие углы. Найдите траектории световых лучей в верхней полуплоскости $x \geqslant 0$ с показателем преломления $n(x, y) = 1/y$.