Решение некоторых дифференциальных уравнений

Дифференциальное уравнение k-того порядка на неизвестную функцию $y = y(x)$ переменной x — это соотношение вида $F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(k)}) = 0$, в которое входит x, y и первые k производных $y', y'', \ldots, y^{(k)}$ от y по x. Его *решением* называется всякая функция $y = f(x)$, при подстановке которой в F вместо y получается тождественно нулевая функция от x.

М40◇1. Пусть $c = \text{const}$, дифференцируемые функции $y = f(x)$, $y = g(x)$ являются решениями уравнения $y' = cy$ на некотором интервале и $g(x) \neq 0$ на этом интервале. Чему может быть равно отношение $f(x)/g(x)$?

М40◇2. Найдите все решения дифференциального уравнения $y' = cy$ на любом интервале.

М40◇3. Найдите все функции $(0,1) \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, такие что $f' = -2f$ всюду на $(0,1)$ и $f(1/2) = 1$.

М40◇4. Пусть на некотором интервале ненулевая функция $y = y(x)$ удовлетворяет уравнению $y' - cy = 0$, а функция $z = z(x)$ — уравнению $z' - cz = h(x)$, где $c = \text{const}$, а $h(x)$ — данная функция. Выразите z/y через c и h и найдите все решения обоих уравнений.

М40◇5. Найдите все решения уравнений: **а)** $y' - 2y = x$ **б)** $y' + y = e^{2x}$ **в)** $y' + 3y = \cos(2x)$

М40◇6°. Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ — это все корни многочлена $\lambda^k + a_{k-1}\lambda^{k-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$. Верно ли, что $y^{(k)} + a_{k-1}y^{(k-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = \left(\dfrac{d}{dx} - \lambda_1\right)\left(\dfrac{d}{dx} - \lambda_2\right)\cdots\left(\dfrac{d}{dx} - \lambda_k\right) y$?

М40◇7. Найдите все решения уравнений: **а)** $y'' = y$ **б)** $y'' - y' = 2y$ **в)** $y'' + y = 2y'$.

М40◇8. Выделите в предыдущей задаче те решения, которые удовлетворяют условиям:
а) $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ **б)** $y(-1) = y(1) = 1$

Комплекснозначные функции. Любая функция $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{C}$ однозначно записывается в виде $f(x) = u(x) + iv(x)$, где $u, v : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ суть вещественнозначные функции, называемые *вещественной* и *мнимой* частями f. Положим, по определению, $f' = u' + iv'$ и $\int f\,dx = \int u\,dx + i\int v\,dx$.

М40◇9. Найдите вещественную и мнимую части функций $z = e^{(2+3i)x}$ и $z = e^{(2-3i)x}$.

М40◇10. Докажите, что комплекснозначная функция тогда и только тогда удовлетворяет дифференциальному уравнению вида $y^{(k)} + a_{k-1}y^{(k-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0$ с постоянными $a_\nu \in \mathbb{R}$, когда её вещественная и мнимая части удовлетворяют этому уравнению.

М40◇11. Найдите все комплекснозначные функции $z = z(x)$, удовлетворяющие уравнениям (константа $\lambda \in \mathbb{C}$ и комплекснозначная функция $h(x)$ заданы):
а) $z' - \lambda z = 0$ **б)** $z' - \lambda z = h(x)$

М40◇12. Найдите все вещественные решения дифференциального уравнения $y'' = -y$.

М40◇13. Найдите все вещественные решения дифференциального уравнения $y'' = -2y$, удовлетворяющие условиям: **а)** $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$ **б)** $y(0) = 1$, $y(\pi) = 0$.

М40◇14*. Найдите все вещественные решения дифференциального уравнения $y'' + y = e^{4x}$ с $y(0) = 4$, $y'(0) = -3$.

М40◇15 (разделённые переменные). Докажите, что дифференцируемая функция y тогда и только тогда удовлетворяет дифференциальному уравнению $h(y)y' = g(x)$ с заданными непрерывными функциями $h(y)$, $g(x)$, когда при некотором постоянном c она удовлетворяет обычному (не дифференциальному) уравнению $H(y) = G(x) + c$, в котором H и G суть какие-либо первообразные от h и g.

М40◇16. Найдите все решения дифференциальных уравнений:
а) $(x+1)y' = xy$ **б)** $y' = y\sin x$ **в)** $yy' + x = 1$

М40◇17. Найдите все решения дифференциального уравнения $y' \operatorname{ctg} x + y = 2$ с $y(0) = -1$.