Теорема единственности решения обыкновенного дифференциального уравнения

M$40\frac{2}{3}\diamond$1. Найдите все решения уравнения $y' = y^{2/3}$ и укажите два различных решения, удовлетворяющие начальному условию $y(0) = 0$.

Постановка задачи. Всюду в этом листке константа C, прямоугольник Π, «бабочка» $B_\delta \subset \Pi$, отрезок $D_\delta \ni x_0$ и пространство $\mathscr{M}_\delta$ непрерывных функций на D_δ с графиками внутри B_δ будут те же самые, что и в предыдущем листке. Мы докажем, что если правая часть дифференциального уравнения $y' = F(x, y)$ удовлетворяет дополнительному условию:

$$\exists\, L \in \mathbb{R} : |F(x, y_1) - F(x, y_2)| < L \cdot |y_1 - y_2| \qquad \forall\, x \in [a, b] \ \&\ \forall\, y_1, y_2 \in [c, d] \tag{1}$$

то любые два решения дифференциального уравнения $y' = F(x, y)$, графики которых проходят через точку (x_0, y_0) совпадают над некоторой δ-окрестностью точки x_0.

M$40\frac{2}{3}\diamond$2 (приближения Пикара). Будем строить последовательные приближения $\psi_k(x) \in \mathscr{M}_\delta$ (с $k = 0, 1, 2, \ldots$) к решению уравнения $y' = F(x, y)$, взяв $\psi_0(x) \equiv y_0$ и подбирая в качестве ψ_{k+1} такую дифференцируемую функцию, производная от которой равна значениям функции F на графике предыдущего приближения ψ_k, т. е. удовлетворяющую при $x \in D_\delta$ уравнению $\psi'_{k+1}(x) = F(x, \psi_k(x))$ и такую, что $\psi_{k+1}(x_0) = y_0$. Докажите, что $\psi_{k+1}(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} F(t, \psi_k(t))\, dt$ и проверьте, что все $\psi_k \in \mathscr{M}_\delta$.

M$40\frac{2}{3}\diamond$3. Явно вычислите все приближения Пикара для уравнения $y' = y$ с начальным условием $y(0) = 1$ и честно найдите их предел.

M$40\frac{2}{3}\diamond$4. Пусть функция F удовлетворяет условию (1). Докажите, что при достаточно малом δ правило $P : \psi(x) \longmapsto P\psi(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} F(t, \psi(t))\, dt$ определяет сжимающее отображение $\mathscr{M}_\delta \xrightarrow{P} \mathscr{M}_\delta$.

M$40\frac{2}{3}\diamond$5. Докажите, что функция $\psi \in \mathscr{M}_\delta$ тогда и только тогда является решением уравнения $y' = F(x, y)$, когда $P\psi = \psi$.

M$40\frac{2}{3}\diamond$6. Докажите сформулированную в начале листка теорему единственности. Как она уживается с примером из зад. M$40\frac{2}{3}\diamond$1?

M$40\frac{2}{3}\diamond$7. Пусть отображение $\mathscr{M} \xrightarrow{P} \mathscr{M}$ (в произвольном метрическом пространстве) является сжимающим с константой $0 < \lambda < 1$ (т. е. $\varrho(P\varphi, P\psi) \leqslant \lambda\varrho(\varphi, \psi)$ $\forall\ \varphi, \psi \in \mathscr{M}$). Докажите, что расстояние от произвольной точки $\psi \in \mathscr{M}$ до неподвижной точки ψ_0 отображения P удовлетворяет неравенству $\varrho(\psi, \psi_0) \leqslant \dfrac{\varrho(\psi, P\psi)}{1-\lambda}$.

M$40\frac{2}{3}\diamond$8. Докажите, что если функция F удовлетворяет условию (1), то *вся* последовательность ломаных Эйлера из зад. M$40\frac{1}{2}\diamond$5 *равномерно* (т. е. по метрике $\mathscr{M}_\delta$, а не поточечно) сходится к решению уравнения $y' = F(x, y)$.

M$40\frac{2}{3}\diamond$9* (теорема о непрерывной зависимости от начальных условий). Пусть функция F удовлетворяет условию (1). Докажите, что у точки (x_0, y_0) существует окрестность $\widetilde{\Pi} \subset \Pi$, такая что при некотором фиксированном $\delta > 0$ и произвольных $(\widetilde{x}_0, \widetilde{y}_0) \in \widetilde{\Pi}$ уравнение $y' = F(x, y)$ будет обладать единственным решением $y = f(x)$, определённым всюду на D_δ и удовлетворяющим начальному условию $f(\widetilde{x}_0) = \widetilde{y}_0$, и более того, сопоставление точке $(\widetilde{x}_0, \widetilde{y}_0) \in \widetilde{\Pi}$ такого решения будет непрерывным отображением из $\widetilde{\Pi}$ в пространство непрерывных функций на D_δ.