# Теорема существования решения обыкновенного дифференциального уравнения

**Постановка задачи.** На плоскости $XOY$ заданы: прямоугольник

$$\Pi = \{ (x,y) \mid a \leqslant x \leqslant b,\ c \leqslant y \leqslant d \} ,$$

точка $(x_0, y_0)$, лежащая строго внутри него, и дифференциальное уравнение $y' = F(x,y)$, правая часть которого $\Pi \xrightarrow{F} \mathbb{R}$ является непрерывной функцией на $\Pi$. Мы докажем, что существует $\varepsilon$-окрестность $U_\varepsilon$ точки $x_0$ и дифференцируемая функция $U_\varepsilon \xrightarrow{f} [c,d]$, такие что $f'(x) = F(x, f(x)) \quad \forall x \in U_\varepsilon$ и $f(x_0) = y_0$.

**M$40\frac{1}{2}$◇1.** Зададимся некоторой $\varepsilon$-окрестностью $U_\varepsilon$ точки $x_0$ и рассмотрим следующие два множества дифференцируемых функций $U_\varepsilon \xrightarrow{\varphi} [c,d]$, заданных на этой окрестности:

$$\mathscr{F}^{\uparrow} \overset{\text{def}}{=} \{ \varphi \mid \ \forall x \in U_\varepsilon \ \ \varphi'(x) > F(x, \varphi(x)) \}$$
$$\mathscr{F}_{\downarrow} \overset{\text{def}}{=} \{ \varphi \mid \ \forall x \in U_\varepsilon \ \ \varphi'(x) < F(x, \varphi(x)) \}$$

Докажите, что $\exists\, \varepsilon$ : оба множества $\mathscr{F}^{\uparrow}, \mathscr{F}_{\downarrow}$ непусты, и справа от $x_0$ график любой функции из $\mathscr{F}^{\uparrow}$ лежит выше графика любой функции из $\mathscr{F}_{\downarrow}$, а слева — наоборот.

**M$40\frac{1}{2}$◇2.** Определим функцию $f(x)$ справа от $x$ как $\inf\limits_{\varphi \in \mathscr{F}^{\uparrow}} \varphi(x)$, а слева от $x$ как $\sup\limits_{\varphi \in \mathscr{F}^{\uparrow}} \varphi(x)$. Докажите, что $f$ существует, непрерывна, дифференцируема и удовлетворяет уравнению $y' = F(x,y)$.

**Обозначения.** Пусть $C = \sup\limits_{\Pi} |F(x,y)|$. Обозначим через $D_\delta$ отрезок $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$, где $\delta$ выбрано так, чтобы «бабочка» $B_\delta \overset{\text{def}}{=} \{ (x,y) \mid x \in D_\delta, |y - y_0| \leqslant C|x - x_0| \}$ лежала целиком внутри $\Pi$. Обозначим через $\mathscr{M}_\delta$ множество всех непрерывных функций $D_\delta \xrightarrow{\varphi} [c,d]$, график которых содержится в $B_d$.

**M$40\frac{1}{2}$◇3.** Докажите, что $\mathscr{M}_\delta$ является полным метрическим пространством с расстоянием $\varrho(\varphi, \psi) = \sup\limits_{x \in D_\delta} |\varphi(x) - \psi(x)|$.

**M$40\frac{1}{2}$◇4 (лемма Асколи - Арцела).** Дано некоторое множество $\mathscr{F}$ непрерывных функций на отрезке. Докажите, что любая ограниченная последовательность функций из $\mathscr{F}$ содержит поточечно сходящуюся подпоследовательность[1] тогда и только тогда, когда все функции в $\mathscr{F}$ ограничены общей константой и *в равной степени* непрерывны ( т. е. $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0$ : $|x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| < \varepsilon$ сразу для всех $\varphi \in \mathscr{F}$).

**M$40\frac{1}{2}$◇5 (ломаные Эйлера).** Разобъём $D_\delta$ на $2n$ равных частей длины $h = \delta/n$ и определим непрерывную функцию $\varphi_n(x)$, полагая $\varphi(x_0) = y_0$, и далее продолжая её влево и вправо индуктивным правилом: над отрезком $[x_0 + kh, x_0 + (k+1)h]$ (где $k = 0, 1, 2, \dots$ ) и над отрезком $[x_0 + (k-1)h, x_0 + kh]$ (где $k = 0, -1, -2, \dots$ ) $\varphi(x)$ есть прямая с угловым коэффициентом $F(x_0 + kh, \varphi(x_0 + kh))$ (значение $\varphi(x_0 + kh)$ определено по индуктивному предположению). Докажите, что все $\varphi_n$ лежат в $\mathscr{M}_\delta$ и из них можно выбрать подпоследовательность, имеющую поточечный предел, также лежащий в $\mathscr{M}_\delta$.

**M$40\frac{1}{2}$◇6.** Явно опишите последовательность ломаных Эйлера для уравнения $y' = y$ с начальным условием $y(0) = 1$ и шагом $h = 1/n$, и честно найдите её предел при $n \to \infty$.

**M$40\frac{1}{2}$◇7.** Докажите, что поточечный предел любой сходящейся последовательности ломаных Эйлера из зад. M$40\frac{1}{2}$◇5 является дифференцируемой функцией, удовлетворяющий уравнению $y' = F(x,y)$ (мы ещё вернёмся к этой задаче в следующем листке).

[1]предел которой не обязан принадлежать $\mathscr{F}$