Примеры длин и площадей

М39◇1. Вычислите площадь ограниченной фигуры, заключённой между кривыми:

а) $x + y = 2$ и $x^2 = y$ **б)** $x = y$ и $y = x + \sin^2 x$ **в)** $x = 0$, $y = 2$ и $y = 2^x$ **г*)** $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

М39◇2. Какова площадь под графиком $\sin^2 x$ над любым отрезком длины $\pi k/2$ $(k \in \mathbb{N})$?

М39◇3. Найдите $\displaystyle\int \sqrt{1 - x^2}dx$ и явным интегрированием получите формулу, выражающую площадь сегмента единичного круга через: **а)** высоту сегмента **б)** длину дуги

М39◇4°. Пусть точка P_t движется против часовой стрелки по единичной окружности $x^2+y^2 = 1$ так, что в момент времени $t = 0$ она находится в точке $P_0 = (1, 0)$ и при всех $-\pi \leqslant t \leqslant \pi$ площадь кругового сектора P_0OP_t равна $2|t|$. Выразите через t абсциссу и ординату точки P_t, а также ординату точки пересечения луча $[OP_t)$ с прямой $x = 1$.

Гиперболические функции. Пусть точка P_t движется снизу вверх по правой ветви «единичной гиперболы» $x^2 - y^2 = 1$ так, что в момент времени $t = 0$ она находится в точке $P_0 = (1, 0)$ и при всех $-\infty < t < +\infty$ площадь гиперболического сектора P_0OP_t равна $2|t|$. В этом случае абсцисса и ордината точки P_t называются *гиперболическим косинусом* и *гиперболическим синусом*, а ордината точки пересечения луча $[OP_t)$ с прямой $x = 1$ называется *гиперболическим тангенсом* числа t. Обозначения: $\operatorname{ch} t$, $\operatorname{sh} t$ и $\operatorname{th} t$. Отношение $\operatorname{cth} t \overset{\text{def}}{=} \operatorname{ch} t/ \operatorname{sh} t$ называется *гиперболическим котангенсом*.

М39◇5. Найдите $\displaystyle\int \sqrt{x^2 - 1}\, dx$, явно вычислите площадь гиперболического сектора и выразите гиперболические функции через экспоненты $e^{\pm t}$ (обязательно сделайте проверку выполнения «основного гиперболического тождества» $\operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t = 1$).

М39◇6°. Выразите $\operatorname{th} t$ через $\operatorname{sh} t$, $\operatorname{ch} t$ и выведите гиперболические тождества для:

а) приведения отрицательных аргументов (т. е. для $\operatorname{sh}(-t)$, $\operatorname{ch}(-t)$, $\operatorname{th}(-t)$ и $\operatorname{cth}(-t)$)

б) универсальной гиперболической подстановки (рациональная параметризация гиперболы «тангенсом половинного угла»).

в) двойного аргумента (т. е. для $\operatorname{sh}(2t)$, $\operatorname{ch}(2t)$, $\operatorname{th}(2t)$ и $\operatorname{cth}(2t)$)

г) сложения аргументов (т. е. для $\operatorname{sh}(t_1 + t_2)$, $\operatorname{ch}(t_1 + t_2)$, $\operatorname{th}(t_1 + t_2)$ и $\operatorname{cth}(t_1 + t_2)$)

М39◇7. Каковы графики гиперболических функций, их производные и первообразные?

Длина дуги. Будем называть *гладкой параметризованной кривой* любое отображение $[a, b] \xrightarrow{\gamma} \mathbb{R}^2$, заданное в координатах парой непрерывно дифференцируемых функций $x = \gamma_1(t)$, $y = \gamma_2(t)$, таких что *вектор скорости* $v(t) \overset{\text{def}}{=} (\gamma_1'(t), \gamma_2'(t))$ не равен нулю ни при каком $a \leqslant t \leqslant b$. Интеграл $\int_a^b |v(t)|\, dt$ называется *длиной* этой кривой.

М39◇8. Изменится ли длина кривой при замене параметризации γ на композицию $\gamma\circ\vartheta$ с произвольной монотонно возрастающей непрерывно дифференцируемой взаимно однозначной функцией $[c, d] \xrightarrow{\vartheta} [a, b]$? Что будет, если «возрастающая» заменить на «убывающая»?

М39◇9. Вычислите длину дуги кривой: **а)** $y = e^x$, где $0 \leqslant x \leqslant 1$ **б)** $y = \ln\cos x$, где $0 \leqslant x \leqslant \pi/4$ **в)** $y = 2x^2$, где $0 \leqslant y \leqslant 3$ **г)** $y = \operatorname{ch} x$, где $0 \leqslant x \leqslant 1$ **д)** $x = \operatorname{ch}^3 t$, $y = \operatorname{sh}^3 t$, где $0 \leqslant t \leqslant 1$

М39◇10. Как относятся:

а) площадь петли кривой $y^2 = x\,(x - 1)^2$ к площади изопериметричного ей круга?

б*) периметр эллипса с полуосями $a > b$ к длине волны синусоиды $y = \sqrt{a^2 - b^2}\,\sin(x/b)$?