Интеграл по ориентированному отрезку

Интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ — это «ориентированная площадь, ограниченная графиком функции $f(x)$ над ориентированным отрезком $[a,b]$», где «ориентированность» означает, во-первых, что при $a<b$ та часть графика, где $f(x)>0$, учитывается с плюсом, а та часть, где $f(x)<0$, учитывается с минусом, а во-вторых, — что $\int\limits_a^b f(x)\,dx = -\int\limits_b^a f(x)\,dx$, т. е. при проходе отрезка справа налево у всего интеграла следует сменить знак. Придать точный смысл словам «площадь, ограниченная графиком функции» можно *не для всех* функций. В этом листке мы сделаем это только для некоторого класса *хороших* функций. Начнём с того, что интеграл от константы — это площадь соответствующего прямоугольника, а интеграл от ступенчатой функции — это сумма площадей прямоугольников, т. е. если $a=a_0<a_1<a_2<\dots<a_{n-1}<a_n=b$, и ступенчатая функция $[a,b]\xrightarrow{f}\mathbb{R}$ принимает на (a_{i-1},a_i) постоянное значение $c_i\in\mathbb{R}$, то $\int\limits_a^b f(x)\,dx \overset{\text{def}}{=} \sum\limits_{i=1}^{n}(a_i-a_{i-1})\cdot c_i$ (разумеется, надо проверять, что он не зависит от выбора точек a_i, таких что $f=\text{const}$ на (a_{i-1},a_i)). Функцию $[a,b]\xrightarrow{f}\mathbb{R}$ назовём *хорошей*, если существует последовательность ступенчатых функций $\varphi_n(x)\rightrightarrows f(x)$ (согласно зад. М37◇8 все монотонные и все непрерывные функции являются хорошими). Для хорошей функции положим $\int\limits_a^b f(x)\,dx \overset{\text{def}}{=} \lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_a^b \varphi_n(x)\,dx$ (разумеется, надо проверять, что предел существует и зависит только от f, но не от выбора последовательности $\varphi_n\rightrightarrows f$). Наконец, при $a>b$ положим, по определению, $\int\limits_a^b f(x)\,dx = -\int\limits_b^a f(x)\,dx$.

М37◇1°. Докажите следующие свойства интегралов от ступенчатых функций:

а) $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ не зависит от выбора разбиения, на котором f ступенчата

б) $\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^c f(x)\,dx + \int\limits_c^b f(x)\,dx \quad \forall\, c\in[a,b]$

в) если $\forall\, x\in[a,b]\quad |f(x)|\leqslant\lambda$, где $\lambda\in\mathbb{R}$, то $\left|\int\limits_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \lambda\,|b-a|$

г) если $f(x)\leqslant g(x)\quad \forall\, x\in[a,b]$, то $\int\limits_a^b f(x)\,dx \leqslant \int\limits_a^b g(x)\,dx$

д) $\int\limits_a^b \Big(\lambda f(x)+\mu g(x)\Big)\,dx = \lambda\int\limits_a^b f(x)\,dx + \mu\int\limits_a^b g(x)\,dx \ \forall\ \lambda,\mu\in\mathbb{R}$.

М37◇2°. Пусть $f(x)$ — хорошая функция. Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_a^b \varphi_n(x)\,dx$ существует для любой последовательности ступенчатых функций $\varphi_n(x)$, равномерно сходящейся к $f(x)$, и его значение не зависит от выбора последовательности $\varphi_n(x)$.

М37◇3°. Убедитесь, что любая ступенчатая функция хорощая, — так что мы имеем два по-разному определённых интеграла от неё, — равны ли их значения?

М37◇4. Какие свойства зад. М38◇1 остаются справедливыми для любых хороших функций?

М37◇5. Пусть $f_n\rightrightarrows f$ на отрезке $[a,b]$, и все f_n — хорошие функции. Верно ли, что

а) f тоже хорошая? **б)** если f хорошая, то $\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_a^b f_n(x)\,dx$?

М37◇6. Вычислите: **а)** $\int\limits_0^1 x\,dx$ **б)** $\int\limits_0^1 x^2\,dx$ **в*)** $\int\limits_0^1 x^n\,dx$ **г*)** $\int\limits_0^1 e^x\,dx$.