Измеримые функции и интеграл Лебега

Простые и измеримые функции. В этом листке мы будем рассматривать функции, определённые *почти всюду* на фиксированном отрезке $[a,b]$. Слова «почти всюду» означают «всюду на $[a,b]$, за исключением, разве что, некоторого подмножества меры нуль». Две функции называются *эквивалентными* (обозначение: $f \sim g$), если они почти всюду совпадают. Мы будем писать $f_n(x) \dashrightarrow f(x)$, если последовательность функций f_n почти всюду *поточечно* сходится к функции f. Функция $[a,b] \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ называется *измеримой*, если $\forall c \in \mathbb{R}$ подмножество $\{x \in [a,b] \mid f(x) \leqslant c\}$ измеримо. Функция $[a,b] \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ называется *простой*, если отрезок $[a,b]$ можно разбить в дизъюнктное объединение счётного числа измеримых множеств M_i так, что f будет постоянна на каждом множестве M_i положительной меры.

M$37\frac{1}{2}\diamond$1. Пусть $f_n \dashrightarrow f$ и $g_n \sim f_n$. Будут ли $g_n \dashrightarrow f$?

M$37\frac{1}{2}\diamond$2. Пусть $f \sim g$. Верно ли, что **а)** f измерима $\Rightarrow g$ измерима? **б)** f проста $\Rightarrow g$ проста?

M$37\frac{1}{2}\diamond$3. Можно ли в определении измеримой функции заменить $\leqslant$ на **а)** $\geqslant$ **б)** $<$ **в)** $>$ **г)** $=$?

M$37\frac{1}{2}\diamond$4. Измеримы ли функции, которые почти всюду **а)** непрерывны **б)** монотонны?

M$37\frac{1}{2}\diamond$5. Пусть $\mathbb{R}^n \xrightarrow{F} \mathbb{R}$ непрерывна, а $g_1, g_2, \ldots, g_n : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ измеримы. Докажите, что $F\left(g_1(x), g_2(x), \ldots g_n(x)\right)$ измерима на $[a,b]$. Всегда ли измеримы суммы, разности, произведения и модули измеримых функций?

M$37\frac{1}{2}\diamond$6*. Постройте неизмеримую функцию вида $g(f(x))$ с непрерывной f и измеримой g.

M$37\frac{1}{2}\diamond$7. Измерим ли предел почти везде сходящейся последовательности измеримых функций?

M$37\frac{1}{2}\diamond$8. Пусть f измерима и почти всюду ограничена. Постройте последовательность простых функций $\varphi_n \dashrightarrow f$?

M$37\frac{1}{2}\diamond$9* (теорема Егорова). Если $f_n \dashrightarrow f$, то $\forall\, \varepsilon > 0$ существует подмножество $E \subset [a,b]$ с $\mu^*(E) < \varepsilon$, такое что на дополнении к нему $f_n \rightrightarrows f$.

Суммируемые простые функции. Простая функция φ, принимающая значение c_i на измеримом множестве M_i называется *суммируемой*, если *абсолютно сходится* ряд $\int\limits_a^b \varphi(x)\,dx \overset{\text{def}}{=} \sum\limits_i \varphi(c_i)\cdot\mu(M_i)$.

M$37\frac{1}{2}\diamond$10. Изменяется ли интеграл от замены простой функции на эквивалентную?

M$37\frac{1}{2}\diamond$11. Обладают ли интегралы простых суммируемых функций свойствами из зад. M38$\diamond$1?

M$37\frac{1}{2}\diamond$12. Докажите, что классы эквивалентных простых суммируемых функций составляют метрическое пространство $\mathcal{S}([a,b])$ относительно расстояния $\varrho(\varphi,\psi) \overset{\text{def}}{=} \int\limits_a^b |\varphi(x)-\psi(x)|\,dx$.

M$37\frac{1}{2}\diamond$13 (интеграл Лебега). Произвольная функция f называется *суммируемой* на $[a,b]$, если в $\mathcal{S}([a,b])$ существует последовательность Коши $\varphi_n \dashrightarrow f$. Докажите, что тогда существует конечный $\int\limits_a^b f(x)\,dx \overset{\text{def}}{=} \lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_a^b \varphi_n(x)\,dx$, не зависящий от выбора последовательности φ_n.

M$37\frac{1}{2}\diamond$14. Докажите, что любая почти всюду ограниченная измеримая функция суммируема.

M$37\frac{1}{2}\diamond$15. Обладает ли интеграл Лебега свойствами из зад. M38$\diamond$1?

M$37\frac{1}{2}\diamond$16* (лемма Фату). Пусть последовательность неотрицательных суммируемых функций $f_n \dashrightarrow f$ и все $\int\limits_a^b f_n(x)\,dx \leqslant C$. Докажите, что f тоже суммируема и $\int\limits_a^b f(x)\,dx \leqslant C$.

M$37\frac{1}{2}\diamond$17*. Докажите, что пространство $\mathscr{L}_1([a,b])$ классов суммируемых на $[a,b]$ функций с расстоянием $\varrho(f,g) \overset{\text{def}}{=} \int\limits_a^b |f(x)-g(x)|\,dx$ является пополнением $\mathcal{S}([a,b])$.