Последовательности функций

Равномерная и поточечная сходимость. Рассмотрим последовательность функций $f_n(x)$, заданных на одном и том же множестве $X \subset \mathbb{R}$. Функция $X \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ называется *поточечным* пределом последовательности f_n, если $\forall x \in X \quad f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ (обозначение: $f_n \to f$ при $n \to \infty$). Иначе говоря, f_n поточечно сходятся к f, если $\forall\, \varepsilon > 0$ и $\forall\, x \in X\ \exists N \in \mathbb{N} : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\ \forall\, n > N$. Это N, вообще говоря, зависит как от погрешности ε, так и от точки x. Если зависимость от точки x отсутствует, то сходимость называется *равномерной* (обозначение: $f_n \rightrightarrows f$ при $n \to \infty$). Иначе говоря, f_n равномерно сходятся к f, если $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\ \forall\, n > N$ сразу для всех $x \in X$.

М36◇1. Постройте поточечно, но не равномерно сходящуюся к $f(x) \equiv 0$ последовательность
а) каких-нибудь функций на $[\,0\,,\,1\,]$ **б)** непрерывных функций на $(\,0\,,\,1\,)$

М36◇2. Сходится ли (и если да, то как и к чему) на $[\,0\,,\,1\,]$ последовательности функций:
а) $f_n(x) = x^{1/n}$ **б)** $f_n(x) = x^n$ **в)** $f_n(x) = (1 + x^n)/(1 + x^{2n})$ **г)** $g_n(x) = (1 + x^{2n-1})/(1 + x^{2n})$

М36◇3. Пусть последовательности f_n и g_n равномерно сходятся на всём $\mathbb{R}$. Будет ли равномерно сходиться **а)** $f_n + g_n$? **б)** $f_n \cdot g_n$? **в)** $1/f_n$, если $\forall\, x, n\ f_n(x) \neq 0$?

М36◇4. Обязан ли быть поточечный предел последовательности
а) многочленов степени $\leqslant d$ многочленом степени $\leqslant d$?
б) непрерывных на $[a, b]$ функций непрерывной на $[a, b]$ функцией?

М36◇5 (лемма о равномерной непрерывности). Докажите, что если функция f непрерывна на $[a, b]$, то $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta : |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$ сразу для всех пар x_1, x_2 с $|x_1 - x_2| < \delta$.

М36◇6. Пусть последовательность функций f_n поточечно сходится к функции f на $[a, b]$. Обязана ли эта сходимость быть равномерной, если
а) все f_n и f непрерывны и $f_{n+1}(x) \geqslant f_n(x)$ всюду на $[a, b]$
б) то же, но без условия, что f непрерывна
в) все f_n непрерывны и монотонно неубывают всюду на $[a, b]$.
г) $\forall x\ f_n(x)$ монотонно неубывают по n и $\forall n\ f_n(x)$ монотонно неубывает по x

М36◇7. Докажите, что равномерный предел непрерывных на отрезке функций тоже непрерывен на этом отрезке.

М36◇8 (Ступенчатые функции). Функция $[a, b] \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ называется *ступенчатой*, если существует разбиение $a = a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_{n-1} < a_n = b$ отрезка $[a, b]$, такое что f постоянна на каждом из интервалов (a_{i-1}, a_i). Верно ли, что всякая **а)** неубывающая **б)** непрерывная функция на $[a, b]$ является равномерным пределом подходящей последовательности ступенчатых функций?

М36◇9. Может ли равномерный предел последовательности ступенчатых функций
а) быть неограниченной функцией **б)** иметь бесконечно много разрывов

М36◇10* (лейбницева пила – 2). Разобьём $[\,0\,,\,1\,]$ на 2^n равных частей и обозначим через f_n неотрицательную непрерывную на $[\,0\,,\,1\,]$ функцию, график которой над каждым отрезочком разбиения образован боковыми сторонами правильного треугольника с этим отрезочком в качестве основания. Докажите, что существует $s(x) = \lim\limits_{n\to\infty} (f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x))$. Равномерен ли этот предел? Будет ли $s(x)$ непрерывна? Диффернцируема ли $s(x)$ хоть где-нибудь?

М36◇11*. Существует ли равномерно сходящаяся последовательность всюду дифференцируемых на $[\,0\,,\,1\,]$ функций, предел которой дифференцируем на $[\,0\,,\,1\,]$ **а)** не всюду **б)** нигде.