Примеры пополнений

М$36\frac{2}{3}\diamond$1 (степенные ряды). Составляют ли многочлены метрическое пространство относительно расстояния $\varrho(f,g) = e^{-\deg(f-g)}$ (мы полагаем $\deg 0 = -\infty$ и $\deg c = 0$ для любой константы $c \neq 0$), и если да, то как устроено его пополнение?

М$36\frac{2}{3}\diamond$2 (p-адическое расстояние). Для любого простого числа $p \in \mathbb{N}$ определим *p-адическую норму* несократимой дроби $q = p^k a/b \in \mathbb{Q}$, у которой p, a, b попарно взаимно просты, $k, a \in \mathbb{Z}$ и $b \in \mathbb{N}$, равенством $|q|_p \stackrel{\text{def}}{=} p^{-k}$ и положим $|0|_p \stackrel{\text{def}}{=} 0$. Докажите, что p-адическая норма обладает свойствами: **а) (мультипликативность)** $|qr|_p = |q|_p |r|_p$

б) (неархимедовость) $|q+r|_p \leqslant \max(|q|_p, |r|_p)$ с обязательным равенством при $|q|_p \neq |r|_p$

М$36\frac{2}{3}\diamond$3. Проверьте, что $\mathbb{Q}$ является неполным метрическим пространством относительно *p-адического расстояния* $\varrho_p(q,r) \stackrel{\text{def}}{=} |q-r|_p$.

М$36\frac{2}{3}\diamond$4 (p-адические числа). Пополнение $\mathbb{Q}_p$ поля $\mathbb{Q}$ по p-адическому расстоянию называется *полем p-адических чисел*, а его подмножество $\mathbb{Z}_p = \{z \in \mathbb{Q}_p \ : \ |z|_p \leqslant 1\}$ называется кольцом *целых* p-адических чисел. Докажите, что:

а) почленное сложение, умножение, вычитание и деление последовательностей Коши корректно определяет на $\mathbb{Q}_p$ операции, удовлетворяющие аксиомам поля;

б) $\mathbb{Z}_p \subset \mathbb{Q}_p$ является кольцом и совпадает с замыканием $\mathbb{Z}$ в $\mathbb{Q}_p$;

в) $\mathbb{Q}_p$ иначе описывается как поле степенных рядов $\sum a_\nu p^\nu$, начинающихся с произвольной (возможно, отрицательной) целой степени[1], с коэффициентами в конечном поле вычетов $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = \{0, 1, \ldots, (p-1)\}$; вложение $\mathbb{N} \hookrightarrow \mathbb{Q}_p$ сопоставляет числу $m \in \mathbb{N}$ его p-ичную запись $m = m_0 + m_1 p + \cdots + m_k p^k$, где $0 \leqslant m_i \leqslant (p-1)$, и продолжается до вложения $\mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{Q}_p$ посредством вычитания и деления;

г) опишите в терминах рядов образы $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Z}_p$ в $\mathbb{Q}_p$ (ср. с описанием $\mathbb{Q}$ в $\mathbb{R}$ на языке БДД).

М$36\frac{2}{3}\diamond$5. Целы ли 1/6 и 1/7, и извлекаются ли $\sqrt{5}$ и $\sqrt{7}$ в полях **а)** $\mathbb{Q}_2$, **б)** $\mathbb{Q}_3$, **в)** $\mathbb{Q}_5$?

М$36\frac{2}{3}\diamond$6* (лемма Гензеля). Пусть $F(x) \in \mathbb{Z}[x]$ и $a_0 \in \mathbb{Z}$ таковы, что $F(a_0)$ делится на p, а $F'(a_0)$ нет. Постройте последовательность целых чисел $a_1, a_2, a_3, \ldots$, так чтобы $a_k \equiv a_{k-1} \pmod{p^k}$, $0 \leqslant a_k < p^{k+1}$ и $F(a_k) \equiv 0 \pmod{p^{k+1}}$, и докажите, что $\exists$ единственное $\alpha \in \mathbb{Z}_p$, такое что $F(\alpha) = 0$ и $\alpha \equiv a_0 \pmod{p}$. Верно ли то же самое для $F \in \mathbb{Z}_p[x]$ и $a_0 \in \mathbb{Z}_p$?

М$36\frac{2}{3}\diamond$7*. Докажите, что $\mathbb{Z}_p$ гомеморфно[2] канторову множеству (и в частности, компактно, в том смысле, что любое его открытое покрытие содержит конечное подпокрытие).

М$36\frac{2}{3}\diamond$8 (измеримые множества). Назовём два подмножества $X, Y \subset \mathbb{R}$ эквивалентными, если $\mu^*(X \vartriangle Y) = 0$. Верно ли, что

а) классы эквивалентности двух открытых множеств или не пересекаются или совпадают

б) множество $\mathscr{M}$ классов эквивалентных открытых множеств является метрическим пространством с расстоянием $\varrho(U_1, U_2) = \mu^*(U_1 \vartriangle U_2)$

в) его пополнение $\overline{\mathscr{M}}$ состоит из классов измеримых множеств

г) функция $\mathscr{M} \xrightarrow{U \mapsto \mu(U)} \mathbb{R}$ равномерно непрерывна и ее продолжение на $\overline{\mathscr{M}}$ задаёт меру на измеримых множествах

---

[1] сложение, вычитание и умножение таких рядов определяется обычным образом, а ряд обратный к формальному ряду $p^n(a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \cdots)$, где $n \in \mathbb{Z}$ и $a_0 \neq 0$, определяется как $p^{-n}(a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \cdots)^{-1}$ (пользуемся тем, что ряд с ненулевым свободным членом и коэффициентами в поле можно обернуть); обратите внимание, что все эти ряды *абсолютно сходятся* в $\mathbb{Q}_p$!

[2] *гомеоморфизмом* называется взаимно однозначное и непрерывное в обе стороны отображение