Замыкание, «продолжение по непрерывности» и пополнение

M$36\frac{1}{2}\diamond$1 (замыкание). Докажите, что для любого подмножества X в произвольном метрическом пространстве $\mathscr{M}$ найдется единственное замкнутое подмножество $\overline{X} \supset X$, содержащееся в любом другом замкнутом подмножестве $Z \supset X$. Годится ли в качестве $\overline{X}$ множество всех предельных точек X?

M$36\frac{1}{2}\diamond$2. Существует ли на на квадрате $Q \subset \mathbb{R}^2$ разрывная в центре Q функция $Q \longrightarrow \mathbb{R}$ с непрерывным ограничением на любую прямую, которая
а) вертикальна или горизонтальна **б)** проходит через центр Q

M$36\frac{1}{2}\diamond$3. Существует ли на открытом круге $D \subset \mathbb{R}^2$ непрерывная функция $D \subset \mathbb{R}^2$, которую нельзя продолжить до непрерывной функции $\overline{D} \longrightarrow \mathbb{R}^2$?

M$36\frac{1}{2}\diamond$4. Зафиксируем точку p метричкского пространства $\mathscr{M}$ с расстоянием ϱ. Будет ли функция $x \longmapsto \varrho(p,x)$ всюду на $\mathscr{M}$ **а)** непрерывной **б)** равномерно непрерывной[1] ?

M$36\frac{1}{2}\diamond$5 (изометрии). Отображение метрических пространств $\mathscr{M}_1 \xrightarrow{f} \mathscr{M}_2$ называется *изометрическим*, если $\varrho_1(x,y) = \varrho_2(f(x), f(y)) \ \ \forall\, x, y \in \mathscr{M}_1$ (ϱ_i обозначает расстояние в $\mathscr{M}_i$). Всякая ли изометрия **а)** непрерывна? **б)** равномерно непрерывна? **в)** является вложением?

M$36\frac{1}{2}\diamond$6. Пусть на подмножестве $X \subset \mathscr{M}$ задано равномерно непрерывное отображение в полное метрическое пространство $\mathscr{N}$. Всегда ли оно продолжается по непрерывности на $\overline{X}$? Единственно ли такое продолжение? Обязано ли оно быть равномерно непрерывным?

Определение пополнения. Изометрическое вложение $\mathscr{M} \xhookrightarrow{c} \overline{\mathscr{M}}$ метрического пространства $\mathscr{M}$ в *полное* метрическое пространство $\overline{\mathscr{M}}$ называется *пополнением*, если любое изометрическое отображение $\mathscr{M} \xrightarrow{f} \mathscr{N}$ в полное метрическое пространство $\mathscr{N}$ единственным образом продолжается до изометрического отображения $\overline{\mathscr{M}} \xrightarrow{\overline{f}} \mathscr{N}$.

M$36\frac{1}{2}\diamond$7°. Рассмотрим любые два пополнения $\mathscr{M} \xhookrightarrow{c_1} \overline{\mathscr{M}}_1$ и $\mathscr{M} \xhookrightarrow{c_2} \overline{\mathscr{M}}_2$ метрического пространства $\mathscr{M}$. Выведите из определения пополнения, что *существует единственная* изометрическая биекция $\overline{\mathscr{M}}_1 \xrightarrow{\beta} \overline{\mathscr{M}}_2$, тождественная на $\mathscr{M}$ в том смысле, что $c_2 = \beta \circ c_1$.

M$36\frac{1}{2}\diamond$8°. Пусть изометрическое вложение $\mathscr{M} \xhookrightarrow{f} \mathscr{N}$ в полное метрическое пространство $\mathscr{N}$ таково, что замыкание $\overline{f(\mathscr{M})} = \mathscr{N}$. Является ли f пополнением $\mathscr{M}$?

M$36\frac{1}{2}\diamond$9 (существование и единственность пополнения). Чтобы доказать, что всякое метрическое пространство имеет пополнение, единственное в смысле зад. M$37\frac{1}{2}\diamond$7, назовём две последовательности Коши (a_n) и (b_n) в метрическом пространстве $\mathscr{M}$ *эквивалентными*, если их перемешивание $a_1, b_1, a_2, b_2, \dots$ тоже является последовательностью Коши. Проверьте, что **а)** это условие не зависит от способа перемешивания

б) классы эквивалентных последовательностей либо не пересекаются, либо совпадают;

в) $\overline{\varrho}\Big((a_n)\ ,\ (b_n) \Big) \overset{\text{def}}{=} \lim\limits_{n\to\infty} \varrho(a_n, b_n)$ существует и конечно для любых двух последовательностей Коши (a_n), (b_n) и не меняется при замене каждой из них на эквивалентную;

г) множество $\overline{\mathscr{M}}$ классов эквивалентных последовательностей Коши с расстоянием $\overline{\varrho}$ является полным метрическим пространством;

д) отображение $\mathscr{M} \xhookrightarrow{x \mapsto \{x, x, x, \dots\}} \overline{\mathscr{M}}$ является пополнением $\mathscr{M}$.

M$36\frac{1}{2}\diamond$10. Докажите, что любое равномерно непрерывное отображение $\mathscr{M}_1 \xrightarrow{f} \mathscr{M}_2$ единственным способом продолжается до непрерывного отображения между пополнениями. Всегда ли это продолжение равномерно непрерывно?

[1] $\mathscr{M}_1 \xrightarrow{f} \mathscr{M}_2$ *равномерно непрерывно*, если $\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta \ : \ \big(\varrho_1(\,x\,,\,y\,) < \delta \,\big) \Rightarrow \big(\varrho_2(\,f(x)\,,\,f(y)) \big) < \delta\,\big)$