Квадратичная взаимность

Соглашение: всюду в этом листке через p и q обозначаются натуральные *простые* числа.

M$35\frac{2}{3}\diamond1^\circ$. Справедливо ли в $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ тождество $(x+y)^p = x^p + y^p$?

M$35\frac{2}{3}\diamond2^\circ$. Чему равно произведение всех ненулевых чисел в $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$?

M$35\frac{2}{3}\diamond3^\circ$. Сколько решений может иметь в $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ уравнение $x^2 = a$, с произвольным $a \neq 0$ и сколько в $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ квадратов?

M$35\frac{2}{3}\diamond4$. Всегда ли в $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ разрешимо уравнение $x^2 + y^2 = 1$?

M$35\frac{2}{3}\diamond5$. Какие значения может принимать функция $y = x^{(p-1)/2}$ в $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ на множестве

а) всех ненулевых элементов **б)** всех квадратов **в)** всех не квадратов

M$35\frac{2}{3}\diamond6$ (лемма Гаусса). Выпишем все элементы поля $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ подряд в виде:

$$-(p-1)/2\,,\ \ldots\,,\ -1\,,\ 0\,,\ 1\,,\ \ldots\,,\ (p-1)/2\,.$$

Как связаны чётность числа тех положительных чисел этой записи, которые которые становятся отрицательными от умножения на данное $a \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, со свойством числа $a \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ быть квадратом в $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$?

M$35\frac{2}{3}\diamond7$. Верно ли, что -1 квадрат в $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ тогда и только тогда, когда $p \equiv 1 \pmod 4$ или $p = 2$?

M$35\frac{2}{3}\diamond8$. Верно ли, что 2 квадрат в $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ тогда и только тогда, когда $(p^2-1)/8$ чётно?

Символ Лежандра - Якоби. Сопоставим каждому $n \in \mathbb{Z}$ число

$$\left(\frac{n}{p}\right) \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} 0\,, & \text{если } n \text{ делится на } p\,, \\ 1\,, & \text{если } n \pmod p \text{ ненулевой квадрат в } \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\,, \\ -1\,, & \text{если } n \pmod p \text{ не квадрат в } \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\,. \end{cases}$$

M$35\frac{2}{3}\diamond9$. Докажите, что при фиксированном p символ $\left(\frac{n}{p}\right)$ мультипликативен в том смысле, что $\left(\frac{mn}{p}\right) = \left(\frac{m}{p}\right)\cdot\left(\frac{n}{p}\right)$ для любых взаимно простых m, n

M$35\frac{2}{3}\diamond10$. Вычислите $\displaystyle\sum_{n=1}^{p-1}\left(\frac{n}{p}\right)$.

M$35\frac{2}{3}\diamond11$. Как связан знак $\left(\frac{m}{p}\right)$ со знаком произведения $\displaystyle\prod_{j=1}^{(p-1)/2}\frac{\sin\left(m\cdot 2\pi j/p\right)}{\sin\left(2\pi j/p\right)}$?

M$35\frac{2}{3}\diamond12^*$ (golden Satz Гаусса[1]). Докажите, что для любых простых чисел p, q выполняется равенство[2] $\left(\frac{p}{q}\right)\cdot\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}\frac{q-1}{2}}$.

M$35\frac{2}{3}\diamond13$. Найдите $\left(\frac{57}{43}\right)$.

M$35\frac{2}{3}\diamond14$. Является ли 2001 квадратом по модулю **а)** 2 **б)** 43 **в)** 57 **г)** 91

[1]эта теорема также известна как *квадратичный закон взаимности*

[2]подсказка: примените зад. M$36\frac{2}{3}\diamond11$, разложив все отношения синусов по формулам из зад. M$36\frac{1}{2}\diamond3$