# Эйлеровы разложения и $\zeta$-функция Римана

**М$35\frac12\diamond$1 (формулы Виета – 2).** Докажите, что многочлен $1+a_1x+\cdots+a_nx^n$ с корнями $z_1,z_2,\ldots,z_n$ раскладывается в произведение вида $\prod\limits_{k=1}^{n}(1-\alpha_kx)$ и выразите константы $\alpha_\nu$ через корни $z_\mu$, и коэффициенты $a_k$ — через константы $\alpha_i$.

**М$35\frac12\diamond$2.** Как при нечётном $n\in\mathbb N$ выразить **а)** $\cos(nx)/\cos x$ в виде многочлена от $\sin x$ **б)** $\sin(nx)$ в виде многочлена от $\sin x$ **в)** $\sin(nx)/\sin x$ в виде многочлена от $\sin^2 x$? Найдите степень, корни, старший и два младших коэффициента этого многочлена.

**М$35\frac12\diamond$3.** Справедливы ли при нечётном $n$ тождества: **а)** $\dfrac{\sin nx}{\sin x}=n\prod\limits_{\nu=1}^{\frac{n-1}{2}}\left(1-\dfrac{\sin^2 x}{\sin^2(\pi\nu/n)}\right)$

**б)** $\dfrac{\sin nx}{\sin x}=(-4)^{\frac{n-1}{2}}\prod\limits_{\nu=1}^{\frac{n-1}{2}}\left(\sin^2 x-\sin^2(2\pi\nu/n)\right)$ **в)** $(-1)^{\frac{n-1}{2}}\sin nx=2^{n-1}\prod\limits_{\nu=1}^{n-1}\sin\left(x+\dfrac{2\pi\nu}{n}\right)$

**Эйлерово вычисление суммы квадратов гармонического ряда** выглядело прмерно так. Из разложения синуса в степенной ряд следует, что $(\pi x)^{-1}\sin(\pi x)=1-(\pi^2/6)\cdot x^2+(\pi^4/120)\cdot x^4-\cdots$. Этот «многочлен бесконечной степени» имеет корни $x=\pm n$, где $n\in\mathbb N$, и «по теореме Виета» раскладывается в произведение $\prod(1-x^2/n^2)$. Сравнивая коэффициенты при $x^2$, получаем $\sum(1/n)^2=\pi^2/6$. Однако, «разложение по теореме Виета» не является *формальной операцией* и по сему требует уточнения.

**Бесконечное произведение $\prod(1-a_n)$**, в котором $n$ пробегает $\mathbb N$, и $a_n\in\mathbb R$, называется *сходящимся*, если существует $\lim\limits_{n\to\infty}\prod\limits_{\nu=1}^{n}(1+a_\nu)$, называемый *значением* бесконечного произведения. Произведение называется *абсолютно сходящимся*, если для $n\gg0$ определён и абсолютно сходится ряд $\sum\ln(1+a_n)$. Неабсолютно сходящиеся произведения называют *условно* сходящимися.

**М$35\frac12\diamond$4.** Равносильна ли сходимость произведения $\prod(1+a_n)$ сходимости ряда $\sum\ln(1+a_n)$?

**М$35\frac12\diamond$5.** Докажите, что абсолютно сходящееся произведение сходится, причём его значение не меняется при перемешивании сомножителей.

**М$35\frac12\diamond$6.** Пусть $c>0$ — произвольная константа. Сходятся ли, и если да, то как, произведения (всюду $n\in\mathbb N$): **а)** $\prod(1-(c/n))$ **б)** $\prod(1+(c/n))$ **в)** $\prod(1-(c/n^2))$ **г)** $\prod(1+(c/n^2))$

**М$35\frac12\diamond$7.** Докажите, что $\dfrac{\sin(\pi x)}{n\,\sin(\pi x/n)}=\prod\limits_{\nu=1}^{\frac{n-1}{2}}\left(1-\dfrac{\sin^2(\pi x/n)}{\sin^2(\pi\nu/n)}\right)$ для нечётных $n$, и вычислите пределы обеих частей этого равенства при нечётном $n\to\infty$.

**М$35\frac12\diamond$8 (Эйлеровы разложения).** Докажите, что в следующих далее равенствах правые части абсолютно сходятся к левым при любом $x\in\mathbb R$, где они определены:

**а)** $\sin(\pi x)=\pi x\prod\limits_{n\geqslant1}\left(1-\dfrac{x^2}{n^2}\right)$ **б)** $\operatorname{ctg}(\pi x)=\dfrac{1}{\pi x}-\dfrac{2}{\pi^2}\sum\limits_{n\geqslant1}\dfrac{x}{n^2-x^2}$

**в)** $\operatorname{sh}(\pi x)=\pi x\prod\limits_{n\geqslant1}\left(1+\dfrac{x^2}{n^2}\right)$ **г)** $\operatorname{cth}(\pi x)=\dfrac{1}{\pi x}+\dfrac{2}{\pi^2}\sum\limits_{n\geqslant1}\dfrac{x}{n^2+x^2}$

**М$35\frac12\diamond$9 ($\zeta$-функция Римана).** Докажите, что ряд $\zeta(s)\overset{\text{def}}{=}\sum\limits_{n\geqslant1}n^{-s}$ абсолютно сходится при всех действительных $s>1$.

**М$35\frac12\diamond$10 (числа Бернулли – 3).** Определим *числа Бернулли* $b_k$, как коэффициенты формального степенного ряда $x(1-e^x)^{-1}\overset{\text{def}}{=}\sum b_kx^k/(k!)$. Верно ли, что числа Бернулли с чётными номерами составляют знакопеременную последовательность? Вычислите первые 5 из них, а также все числа с нечётными номерами.

**М$35\frac12\diamond$11 (теорема Эйлера).** Докажите, что $2\zeta(n)=(-1)^{1+\frac n2}\dfrac{(2\pi)^n}{n!}\,b_n$ при чётных $n\in\mathbb N$.