Степенные, показательные и логарифмические функции

Определения и обозначения. Для любых $a \in \mathbb{R}^{>0}$ и $b \in \mathbb{R}$ через a^b обозначается действительное число $e^{b \ln a}$. При фиксированном $b \in \mathbb{R}$ функция $x \mapsto x^b$, заданная на подмножестве $\mathbb{R}^{>0} \subset \mathbb{R}$, называется *степенной функцией с показателем* b. При фиксированном $a \in \mathbb{R}^{>0}$ функция $x \mapsto a^x$, заданная на всём $\mathbb{R}$, называется *показательной функцией с основанием* a.

M34◇1. Верно ли, что **а)** $a^b a^c = a^{b+c}\ \forall\, a \in \mathbb{R}^{>0},\ \forall\, b, c \in \mathbb{R}$ **б)** $b^a c^a = (bc)^a\ \forall\, a \in \mathbb{R}$ и $\forall\, b, c \in \mathbb{R}^{>0}$ **в)** $a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}\ \forall\, m, n \in \mathbb{N}$ и $\forall\, a \in \mathbb{R}^{>0}$ **г)** $a^{-b} = (1/a)^b = 1/(a^b)\ \forall\, a \in \mathbb{R}^{>0},\ \forall\, b \in \mathbb{R}$. **д)** $\left(a^b\right)^c = a^{bc}\ \forall\, a \in \mathbb{R}^{>0},\ \forall\, b, c \in \mathbb{R}$

M34◇2. Каким неравенством связаны при $x \in \mathbb{R}^{>0}$ и $\alpha \in (\,0\,,\,1\,)$ функции: **а)** $\ln(1+\alpha x)$ и $\alpha \ln(1+x)$ **б)** $1 + \alpha x$ и $(1+x)^\alpha$

M34◇3. Вычислите производную степенной функции $y = x^b$ и постройте её график при разных $b \in \mathbb{R}$. При каких b степенная функция $\mathbb{R}^{>0} \xrightarrow{x \mapsto x^b} \mathbb{R}^{>0}$: **а)** взаимно однозначна **б)** строго монотонна **в)** выпукла вверх **г)** выпукла вниз **д)** возрастает **е)** убывает

M34◇4. Вычислите производную показательной функции $y = a^x$ и постройте её график при разных $a \in \mathbb{R}^{>0}$. При каких a показательная функция $\mathbb{R} \xrightarrow{x \mapsto a^x} \mathbb{R}^{>0}$: **а)** строго монотонна **б)** взаимно однозначна **в)** выпукла вверх **г)** выпукла вниз **д)** возрастает **е)** убывает

M34◇5 (логарифм по произвольному основанию). Докажите, что $\forall\, x \in \mathbb{R}^{>0}$ и любого положительного $c \neq 1$ существует единственное число $y \in \mathbb{R}$, такое что $c^y = x$ (это число называется *логарифмом* x *по основанию* c и обозначается $\log_c x$). Выразите $\log_c x$ через $\ln c$ и $\ln x$, вычислите производную $\log_c' x$ и постройте график функции $\mathbb{R} \xrightarrow{x \mapsto \log_c x} \mathbb{R}^{>0}$ при разных $c \in \mathbb{R}^{>0}$. При каких c она **а)** строго монотонна **б)** взаимно однозначна **в)** выпукла вверх **г)** выпукла вниз **д)** возрастает **е)** убывает

M34◇6 (формулы замены основания). При каких a, b, c выполняются равенства $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$ и $a^b = c^{b \log_c a}$? Справедливы ли для функций $y = \log_a x$ и $y = a^x$ с произвольным $a \in \mathbb{R}^{>0} \setminus \{1\}$ тождества из зад. M33◇3 и зад. M33◇10?

M34◇7. Найдите производные от функций: **а)** $e^{\cos^2 x}$ **б)** $x\, e^{x \ln x}$ **в)** $\log_x \left(x^{\ln x}/e^x\right)$ **г)** x^x **д)** x^{x^x}

M34◇8. Вычислите: **а)** $\lim\limits_{x \to \pm\infty} (e^x/x^m)\ \ \forall\, m \in \mathbb{N}$ **б)** $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\ln(x) \,/\, \sqrt[m]{x}\right)\ \forall\, m \in \mathbb{N}$ **в)** $\lim\limits_{x \to 0} (x \ln x)$ **г)** $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{e^x - 1}\right)$ **д)** $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{1}{\ln x} - \dfrac{1}{x-1}\right)$ **е)** $\lim\limits_{x \to 1} x^{1/(1-x)}$ **ж)** $\lim\limits_{x \to 0} x^{x^x - 1}$ **з)** $\lim\limits_{x \to 0} (\ln(1/x))^x$

M34◇9. Постройте (с полным исследованием) графики функций: **а)** $x \ln x$ **б)** $e^{-x} \cdot (3x - 1)$ **в)** $\dfrac{e^x}{(1+x)}$ **г)** $\dfrac{\ln(x)}{\sqrt{x}}$ **д)** $\ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)$ **е)** $\sqrt{1 - e^{-x^2}}$ **ж)** $x^{1/x}$ **з)** $(1+x)^{1/x}$

M34◇10. Какую кривую опишет на плоскости точка, координаты которой меняются по закону:

а) $\begin{cases} x(t) = \dfrac{(e^t + e^{-t})}{2} \\ y(t) = \dfrac{(e^t - e^{-t})}{2} \end{cases}$, **б*)** $\begin{cases} x(t) = \dfrac{(e^{it} + e^{-it})}{2} \\ y(t) = \dfrac{(e^{it} - e^{-it})}{2i} \end{cases}$, где $i = \sqrt{-1} \in \mathbb{C}$?