Экспонента и логарифм[1]

M33◇1. Пусть формальный степенной ряд $f(x) = \sum\limits_{k\geqslant 0} a_k x^k$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $f' = f$. Выразите все коэффициенты a_k через a_0.

M33◇2 (экспонента). Докажите, что ряд $e^x \stackrel{\text{def}}{=} \sum\limits_{\nu\geqslant 0} x^\nu/\nu!$ абсолютно сходится при всех x.

M33◇3. Докажите $\forall\, a, b$ основное экспоненциальное тождество[2]: $e^{a+b} = e^a e^b$.

M33◇4. Для любых положительных ε, $\varrho \in \mathbb{R}$ подберите $n \in \mathbb{N}$ так, чтобы $\forall\ k \geqslant n$ неравенство $|1 + x + x^2/2 + \cdots + x^k/k! - e^x| < \varepsilon$ было выполнено *сразу для всех* x с $|x| \leqslant \varrho$.

M33◇5. Вычислите **а)** $\lim\limits_{x\to 0} e^x$ **б)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x}$ **в*)** $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n$ (ответ: e^x)

M33◇6. Докажите, что функция e^x всюду дифференцируема и вычислите $(e^x)'$.

M33◇7*. Верно ли, что любой ряд $f(x)$ из зад. M33◇1 абсолютно сходится при всех x к всюду дифференцируемой функции? Опишите[3] все дифференцируемые функции на интервале (a, b), удовлетворяющие дифференциальному уравнению $f'(x) = f(x)$ при всех $x \in (a, b)$.

Обозначение. Через $\mathbb{R}^{>0} \subset \mathbb{R}$ мы обозначаем множество всех *положительных* вещественных чисел. Отметим, что оно замкнуто относительно операций умножения и деления.

M33◇8. Докажите, что функция $y = e^x$ является монотонно возрастающей биекцией из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}^{>0}$, и постройте её примерный график.

M33◇9*. Любая ли непостоянная непрерывная функция $\mathbb{R} \xrightarrow{\ f\ } \mathbb{R}^{>0}$, удовлетворяющая тождеству $f(a+b) = f(a)f(b)\ \forall\, a, b \in \mathbb{R}$, переводит 0 в 1, всюду дифференцируема и удовлетворяет дифференциальному уравнению $f'(x) = f(x)$? Опишите все такие функции.

M33◇10 (логарифм). Функция $y = \ln x$, обратная к функции $y = e^x$, называется *натуральным логарифмом*[4]. Докажите, что функция $\mathbb{R}^{>0} \xrightarrow{\ x\mapsto \ln x\ } \mathbb{R}$ является монотонно возрастающей всюду дифференцируемой биекцией и удовлетворяет основному логарифмическому тождеству $\ln(ab) = \ln a + \ln b \quad \forall\, a, b \in \mathbb{R}^{>0}$. Постройте её примерный график и вычислите $\ln'(x)$.

M33◇11 (логарифмическая производная). Выразите $\Big(\ln\big(f(x)\big)\Big)'$ через f и f' и вычислите производную произведения $(1 + 3\,x^2)^3 \cdot (1 - 5\,x^4)^2 \cdot (21 + 7\,x^5)$.

M33◇12*. Любая ли непостоянная непрерывная функция $\mathbb{R}^{>0} \xrightarrow{\ f\ } \mathbb{R}$, удовлетворяющая тождеству $f(ab) = f(a) + f(b)\ \forall\ a, b \in \mathbb{R}^{>0}$, переводит 1 в 0, взаимно однозначна и всюду дифференцируема? Опишите все такие функции.

M33◇13*. Является ли функция $\mathbb{C} \xrightarrow{\ z\mapsto e^z\ } \mathbb{C}$ периодической? Если да, каков период? Найдите множество её значений и укажите в $\mathbb{C}$ какую-нибудь область, взаимно однозначно отображаемую на это множество.

M33◇14* (комплексный логарифм). Пусть $Ln\,(z) \stackrel{\text{def}}{=} \ln|z| + i\,Arg\,(z)$ (напомним, что $Arg\,(z)$ — это *многозначная* функция). Найдите все значения: **а)** $Ln\,(-1)$ **б)** $Ln\,(ie)$ **в)** $e^{Ln\,(z)}$, где $z \neq 0$ **г)** $Ln(e^z)$

M33◇15*. Каков радиус сходимости ϱ у степенного ряда $\ln(1+x) = \sum\limits_{n\geqslant 1} (-1)^{n+1} x^n/n$? Докажите, что при вещественных x с $|x| < \varrho$ правая часть и в самом деле абсолютно сходится к $\ln(1+x)$. Что происходит при $x = \pm\varrho$?

---

[1] задачи 1 – 5 можно решать в $\mathbb{R}$, в $\mathbb{C}$, или и там и там

[2] подсказка: проверьте сначала, что это тождество выполнено для формальных степенных рядов от a, b, потом докажите, что все ряды абсолюьно сходятся и примените зад. M32◇5

[3] подсказка: пусть $f' = f$; найдите $(fe^{-x})'$.

[4] иначе говоря, $\ln x$ — это степень, в которую надо возвести число e, чтобы получить x