Сходимость рядов[1]

Напоминания о сходящихся рядах. Суммой числового ряда $\sum c_\nu$ (вещественного или комплексного) называется предел его *частичных* сумм $\lim\limits_{n\to\infty}(c_0+c_1+\cdots+c_n)$. Если он существует, ряд называется *сходящимся*, если нет — *расходящимся*. Ряд называется *абсолютно сходящимся*, если все конечные суммы вида $|c_i|+|c_{i+1}|+\cdots+|c_{i+m}|$ ограничены сверху. Сходящийся ряд, который не является абсолютно сходящимся, называется *условно сходящимся*.

M32◇1. Приведите пример какого-нибудь условно сходящегося ряда. Можно ли перемешать его слагаемые так, чтобы **а)** сумма изменилась **б)** ряд перестал сходится

M32◇2*. Можно ли перемешать слагаемые произвольного условно сходящегося рада так, чтобы он стал **а)** расходиться **б)** сходиться к любому наперёд заданному числу (в т. ч. $\pm\infty$)?

M32◇3. Докажите, что всякий абсолютно сходящийся ряд сходится, причём его сумма не меняется при перемешивании слагаемых.

M32◇4 (критерий Коши). Докажите, что для абсолютной сходимости ряда $\sum c_\nu$ необходимо и достаточно, чтобы $\forall\,\varepsilon>0\quad\exists\,n\in\mathbb{N}\;:\;|c_k|+|c_{k+1}|+\cdots+|c_{k+m}|<\varepsilon\;\forall\,k>n$ и $\forall\,m\in\mathbb{N}$.

M32◇5. Докажите, что ряд $\sum a_\nu b_\mu$, составленный из всевозможных попарных произведений (всё равно в каком порядке) членов двух абсолютно сходящихся рядов $\sum a_\nu$ и $\sum b_\mu$ абсолютно сходится к произведению сумм рядов-сомножителей.

M32◇6 (признаки Абеля и Дирихле). Сходится ли ряд $\sum\limits_n a_n b_n$, если:

а) ряд $\sum|a_\nu|$ сходится, а числа b_ν ограничены?

б) частичные суммы $a_1+\cdots+a_n$ ограничены, а b_ν монотонно стремятся к нулю при $\nu\to\infty$?

M32◇7 (признак Коши). Докажите, что ряд $\sum c_\nu$ абсолютно сходится, если существует (вещественное) $q<1$, такое что $\sqrt[\nu]{|c_\nu|}\leqslant q$ при всех $\nu\gg 0$.

M32◇8 (признак Даламбера). Докажите, что ряд $\sum c_\nu$ абсолютно сходится, если существует (вещественное) $q<1$, такое что $|c_{\nu+1}/c_\nu|\leqslant q$ при всех $\nu\gg 0$.

M32◇9. Сходятся ли: **а)** $\sum\limits_{n\geqslant1}\binom{2n}{n}^{-1}$ **б)** $\sum\limits_{n\geqslant1}\dfrac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ **в)** $\sum\limits_{n\geqslant1}\left(\dfrac{n-1}{n+1}\right)^{n(n-1)}$ **г)** $\sum\limits_{n\geqslant1}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$

M32◇10* (радиус сходимости степенного ряда). Докажите, что ряд $\sum a_n x^n$ абсолютно сходится при любом $|x|<\varrho$ и расходится при любом x с $|x|>\varrho$, где $\varrho\in\mathbb{R}$ — это число, обратное к твг множества[2] предельных точек последовательности $\sqrt[n]{|a_n|}$.

M32◇11*. Сравните радиусы сходимости формального степенного ряда f и его формального производного ряда f'.

M32◇12*. Пусть формальный степенной ряд $f(x)=\sum a_n x^n$ имеет ненулевой радиус сходимости ϱ. Зададимся произвольным числом r, таким что $0<r<\varrho$. Докажите, что $\forall\,\varepsilon>0$ $\exists\,m\in\mathbb{N}$. такое что $\forall\,n>m$ неравенство $|f(x)-a_0-a_1x-\cdots-a_nx^n|<\varepsilon$ выполняется сразу для всех x с $|x|<r$ (это явление называется *равномерной* (по $x<r$) сходимостью).

M32◇13*. Докажите, что сумма степенного ряда с ненулевым радиусом сходимости ϱ является бесконечно дифференцируемой функцией в области $|x|<\varrho$ (подсказка: *равномерно* по x приблизьте $f'(x)$ и $f(x)$ частичными суммами, и одновременно — по формуле для производной как предела приращений — приблизьте частичную сумму производного ряда отношением приращений частичной суммы самого ряда).

M32◇14*. Пусть числа r и R обратны, соответственно, твг и тнг предельных точек последовательности $|a_{n+1}/a_n|$. Сходится ли степенной ряд $\sum a_n x^n$ при $|x|<r$ и $|x|>R$? Какие неравенства связывают r, R и радиус сходимости? Бывают ли они строгими?

[1] задачи этого листка можно решать в $\mathbb{R}$, в $\mathbb{C}$, или и там и там

[2] если это множество неограничено, полагают $\varrho=0$; число ϱ называется *радиусом сходимости* степенного ряда