Мера на прямой

Измеримые множества. Напомним, что произвольное открытое множество $U \subset \mathbb{R}$ представляет собою объединение конечной или счётной системы попарно непересекающихся интервалов, концами которых могут быть $\pm\infty$. Суммарная длина всех этих интервалов обозначается $\mu(U)$ и называется *мерой* открытого множества U, т. е. $\mu\left(\bigsqcup_i (a_i, b_i)\right) \overset{\text{def}}{=} \sum_i |b_i - a_i|$. Если ряд расходится или среди a_i, b_j встречается $\pm\infty$, полагают $\mu(U) = \infty$. Для произвольного множества $M \subset \mathbb{R}$ тнг мер $\mu(U)$ всех открытых $U \supset M$ обозначается $\mu^*(M)$ и называется *верхней мерой* M. Множество M называется *измеримым*, если $\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists$ открытое $U \subset \mathbb{R}$, такое что[1] $\mu^*(M \vartriangle U) < \varepsilon$.

М$32\frac{2}{3}\diamond$1. Пусть $U \subset V$ открыты. Верно ли, что **а)** $U \neq V$ и V ограничено $\Rightarrow \mu(U) < \mu(V)$ **б)** $\mu(U) < \infty \Rightarrow U$ ограничено **в)** U ограничено $\Rightarrow \mu(U) < \infty$

М$32\frac{2}{3}\diamond$2. Составляют ли ограниченные открытые подмножества $U \subset \mathbb{R}$ метрическое пространство относительно «расстояния» $\varrho(U, V) = \mu^*(U \vartriangle V)$?

М$32\frac{2}{3}\diamond$3. Всегда ли $\mu^*(M_1 \vartriangle M_2) = \mu^*(M_1' \vartriangle M_2')$ при $\mu^*(M_1 \vartriangle M_1') = 0$ и $\mu^*(M_2 \vartriangle M_2') = 0$?

М$32\frac{2}{3}\diamond$4 (мера измеримого множества). Пусть M измеримо. Докажите, что $\forall$ последовательности открытых множеств U_n, такой что $\mu^*(M \vartriangle U_n) \to 0$, $\exists$ одинаковый для всех таких последовательностей $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(U_n)$ (он обозначается $\mu(M)$ и называется *мерой* M).

М$32\frac{2}{3}\diamond$5. Верно ли, что $\mu^*(M) = 0 \Rightarrow M$ измеримо и $\mu(M) = 0$?

М$32\frac{2}{3}\diamond$6. Пусть $\mu^*(M_1 \vartriangle M_2) = 0$. Равносильна ли измеримость M_1 измеримости M_2? Верно ли, что $\mu(M_1) = \mu(M_2)$, если оба M_i измеримы?

М$32\frac{2}{3}\diamond$7. Пусть $M_1 \subsetneq M_2$ измеримы. Всегда ли **а)** $\mu(M_1) \leqslant \mu(M_2)$ **б)** $\mu(M_1) < \mu(M_2)$

М$32\frac{2}{3}\diamond$8. Пусть $M_1 \cap M_2 = \varnothing$ и $M_3 = M_1 \cup M_2$. Верно ли, что если какие-то два из множеств M_i измеримы, то измеримо и третье, причём $\mu(M_3) = \mu(M_2) + \mu(M_1)$?

М$32\frac{2}{3}\diamond$9. Измеримо ли **а)** $M_1 \cap M_2$ **б)** $M_1 \cup M_2$ **в)** $M_1 \vartriangle M_2$ если M_1 и M_2 измеримы?

М$32\frac{2}{3}\diamond$10. Равносильна ли измеримость M тому, что **а)** $\exists$ открытое $U : \mu^*(M \vartriangle U) = 0$? **б)** $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists$ измеримое $M' : \mu^*(M \vartriangle M') < \varepsilon$?

М$32\frac{2}{3}\diamond$11*. Имеется бесконечная последовательность измеримых множеств $M_i \subset [\,0\,,\,1\,]$. Верно ли, что **а)** $\bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} M_i$ измеримо и его мера равна $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(M_1 \cup M_2 \cup \dots \cup M_n)$?

б) $\bigcap\limits_{i\in\mathbb{N}} M_i$ измеримо и его мера равна $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(M_1 \cap M_2 \cap \dots \cap M_n)$?

в) если $\forall\, e > 0\ \exists n \in \mathbb{N} : \mu^*(M_k \vartriangle M_m) < \varepsilon\ \forall\, m, k > n$, то $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \mu(M_i)$?

М$32\frac{2}{3}\diamond$12*. Что изменится, если в предыдущей задаче условие «все $M_i \subset [\,0\,,\,1\,]$» :
а) заменить условием «каждое из M_i ограничено» **б)** отбросить вообще?

М$32\frac{2}{3}\diamond$13* (толстое Канторово множество). Постройте на $[\,0\,,\,1\,]$ нигде не плотное замкнутое измеримое подмножество положительной меры.

М$32\frac{2}{3}\diamond$14*. Начав со всех открытых и замкнутых множеств, строят новые множества делая за 1 шаг пересечение или объединение **а)** конечного **б)** не более чем счётного семейства уже построенных множеств. Можно ли построить неизмеримое множество за конечное число таких шагов? А за счетное?

М$32\frac{2}{3}\diamond$15* (пример неизмеримого множества). Назовём *классом $\mathbb{Q}$-эквивалентности* вещественного числа $a \in [\,0\,,\,1\,]$ множество всех $b \in [\,0\,,\,1\,]$, таких что $b - a \in \mathbb{Q}$ (убедитесь, что любые два класса $\mathbb{Q}$-эквивалентности или не пересекаются или совпадают!). Пользуясь аксиомой выбора, построим множество $M \subset [\,0\,,\,1\,]$, содержащее ровно по одному элементу из каждого класса $\mathbb{Q}$-эквивалентности. Может ли M получиться измеримым?

[1] напомним, что *симметрическая разность* $M \vartriangle U \overset{\text{def}}{=} (M \setminus U) \cup (U \setminus M)$