Метрические пространства

Метрическое пространство — это множество $\mathscr{M}$, на котором для каждой пары элементов (p, q) задано неотрицательное *расстояние* $\varrho(p,q) = \varrho(q,p) \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}$, обращающееся в нуль тогда и только тогда, когда $p = q$, и удовлетворяющее *неравенству треугольника*: $\varrho(p,q) + \varrho(q,r) \geqslant \varrho(p,r)\ \forall\, p,q,r \in \mathscr{M}$.

М$32\frac{1}{2}$◇1°. Какие из перечисленных ниже множеств с «расстоянием» являются метрическими пространствами: **а)** непрерывные функции на отрезке $[a,b]$ с $\varrho(f,g) = \sup_{x\in[a,b]} |f(x) - g(x)|$

б) $\mathbb{Q}$ с $\varrho(x,y) = |x - y|$ **в*)** отрезки числовой прямой с $\varrho\Big([a,b]\,,\,[c,d]\Big) = |a - c| + |b - d|$

г) $\mathbb{R}^n$ с $\varrho\Big((x_1, \dots, x_n)\,,\,(y_1, \dots, y_n)\Big) = \sqrt{\sum(x_i - y_i)^2}$ **д)** то же, но $\varrho = \max_i |x_i - y_i|$

е) ограниченные последовательности $(a_n) \subset \mathbb{R}$ с $\varrho\Big((a_n)\,,\,(b_n)\Big) = \sup_i |a_i - b_i|$

ж*) $\Big\{(a_n) \subset \mathbb{R} \,|\, \text{ряд } \sum a_i^2 \text{ сходится}\Big\}$ с $\varrho\Big((a_n)\,,\,(b_n)\Big) = \sqrt{\sum(a_n - b_n)^2}$

Шары и топология. В метрическом пространстве $\mathscr{M}$ для любого вещественного $\varepsilon > 0$ подмножество $D_\varepsilon(p) = \{x \in \mathscr{M} \,|\, \varrho(p,x) < \varepsilon\}$ называютмя *открытым*, а $\overline{D}_\varepsilon(p) = \{x \in \mathscr{M} \,|\, \varrho(p,x) \leqslant \varepsilon\}$ — *замкнутым шаром* радиуса ε с центром p (обязательно продумайте, как устроены шары в пространствах зад. М$32\frac{1}{2}$◇1). Открытый шар $D_\varepsilon(p)$ также называют *ε-окрестностью* точки $p \in \mathscr{M}$. Предельные, внутренние и изолированные точки подмножеств $X \subset \mathscr{M}$, открытые и замкнутые множества, пределы последовательностей $(x_n) \subset \mathscr{M}$, непрерывные функции $\mathscr{M} \longrightarrow \mathbb{R}$ определяются в произвольном метрическом пространстве $\mathscr{M}$ дословно так же, как в $\mathscr{M} = \mathbb{R}$. Например, последовательность элементов $(x_n) \subset \mathscr{M}$ называется *последовательностью Коши*, если $\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, n \in \mathbb{N} \,:\, \varrho(x_m, x_k) < \varepsilon \quad \forall\, m,k > n$. Метрическое пространство называется *полным*, если все последовательности Коши имеют в нём пределы.

М$32\frac{1}{2}$◇2°. Может ли иметь предел последовательность, не являющаяся последовательностью Коши? Может ли последовательность Коши иметь несколько пределов?

М$32\frac{1}{2}$◇3. Подмножество $M \subset \mathscr{M}$ называется *ограниченным*, если существуют $C \in \mathbb{R}$ и $m \in \mathscr{M}$, такие что $\varrho(m,x) < C\ \forall\, x \in M$. Всякая ли ограниченная последовательность содержит подпоследовательность Коши: **а)** в $\mathbb{R}^n$? **б)** в произвольном метрическом пространстве?

М$32\frac{1}{2}$◇4. Какие из метрических пространств зад. М$32\frac{1}{2}$◇1 полны?

М$32\frac{1}{2}$◇5. Докажите, что пересечение конечных и объединение любых наборов открытых множеств открыто, и аналогичные свойства замкнутых множеств. Верно ли, что $U \subset \mathscr{M}$ открыто $\iff \mathscr{M} \setminus U$ замкнуто? Открыты ли открытые шары? Замкнуты ли замкнутые?

М$32\frac{1}{2}$◇6 (теорема о вложенных шарах). Равносильна ли полнота метрического пространства тому, что любая последовательность вложенных замкнутых шаров со стремящимися к нулю радиусами имеет в нём непустое пересечение? Всегда ли это пересечение — одна точка?

М$32\frac{1}{2}$◇7 (теорема о неподвижной точке). Отображение $\mathscr{M} \xrightarrow{F} \mathscr{M}$ называется *сжимающим*, если $\exists\, c \in \mathbb{R} \,:\, 0 < c < 1$ и $\varrho(F(x), F(y)) \leqslant c \cdot \varrho(x,y)\ \forall\, x,y \in \mathscr{M}$. Докажите, что если $\mathscr{M}$ полно, то любое сжимающее отображение F имеет единственную неподвижную точку, причём к ней сходится любая последовательность вида $x,\ F(x),\ F(F(x)),\ \dots$

М$32\frac{1}{2}$◇8. Пусть $X \subset \mathscr{M}$ удовлетворяет *условию Больцано - Вейерштрасса*: любая последовательность элементов X имеет в X предельную точку. Докажите, что

а) $\forall\, \varepsilon > 0 \quad X$ покрывается конечным множеством шаров радиуса $\leqslant \varepsilon$

б) $\forall$ открытого покрытия X можно указать $\varepsilon > 0$ так, что всякий шар радиуса $\leqslant \varepsilon$ с центром в X целиком содержится хотя бы в одном из множеств покрытия

в) в любом покрытии X открытыми множествами содержится конечное подпокрытие

М$32\frac{1}{2}$◇9 (компактные подмножества $\mathbb{R}^n$). Докажите, что для подмножества $X \subset \mathbb{R}^n$ (с любой метрикой из зад. М$32\frac{1}{2}$◇1) условие Больцано - Вейерштрасса, условие одновременной ограниченности и замкнутости, и условие наличия в любом открытом покрытии конечного подпокрытия попарно эквивалентны.