Упражнения в дифференцировании

М31◇1°. Вычислите производную от каждой тригонометрической функции.

М31◇2° (теорема об обратной функции). Пусть f дифференцируема на $[a,b]$, $f'>0$ всюду на (a,b), и $f(a)=\alpha$, $f(b)=\beta$. Докажите, что f отображает $[a,b]$ на $[\alpha,\beta]$ взаимно однозначно, причём обратная к f функция $g:[\alpha,\beta]\longrightarrow[a,b]$ дифференцируема, и $\forall\,\gamma\in[\alpha,\beta]$ выразите $g'(\gamma)$ через $f'(g(\gamma))$.

М31◇3°. Продифференцируйте: **а)** x^α, $\alpha\in\mathbb{Q}$ **б)** $\arcsin x$ **в)** $\arccos x$ **г)** $\operatorname{arctg} x$

М31◇4°. Продифференцируйте: **а)** $x\sqrt{1-x^2}$ **б)** $\sqrt[m+n]{(1-x)^m(1+x)^n}$ **в)** $\operatorname{arctg}\dfrac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}$
г) $\sqrt[3]{\dfrac{1+x^3}{1-x^3}}$ **д)** $\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x}}}$ **е)** $\sin\left(\cos^2 x\right)\cdot\cos\left(\sin^2 x\right)$ **ж)** $\arcsin\dfrac{1-x^4}{1+x^4}$

М31◇5°. Вычислите все производные от: **а)** $\sin x$ **б)** $\cos x$ **в)** $1/x$ **г)** $\sqrt[m]{1+\alpha x}$

М31◇6. Вычислите 9-ю производную от: **а)** $\prod\limits_{k=1}^{8}(x+k)$ **б)** $\prod\limits_{k=1}^{9}(x+k)$ **в)** $\prod\limits_{k=1}^{10}(x+k)$
г) $(1+x)\big/\sqrt{1-x}$ **д)** $1\big/(x(x+1))$ **е)** $1\big/(x^2-1)$ **ж*)** $1\big/(x^2+1)$ **з*)** $1\big/(x^2+x+1)$

М31◇7°. Найдите inf, sup и все локальные экстремумы функций: **а)** $|x^2-3\,x+2|$ на $[-10,10]$;
б) $\dfrac{1+x^2}{1+x^4}$ на $[0,+\infty)$ **в)** $\dfrac{2x}{1+x^2}$ на всём $\mathbb{R}$ и на $[-1,2]$ **г)** $x\sqrt[3]{x-1}$ на $[-2,5]$

М31◇8. Верно ли, что: **а)** $\sin x > x - x^3\big/6$ при $x>0$? **б)** $\operatorname{tg} x > x + x^3\big/3$ при $0<x<\pi/4$?

М31◇9°. Найдите кратчайшее расстояние от точки $(7,6)$ до параболы $y=x^2+x+1$.

М31◇10. Соберётся ли, отразившись от параболы $y=ax^2+bx+c$, в одной точке параллельный пучок лучей, падающий на неё по вертикали сверху? Если да, то в какой точке?

М31◇11*. Гипербола представляет собой ГМТ, разность расстояний от которых до двух данных точек F_1 и F_2 постоянна и равна δ. Докажите, что поток лучей от точечного источника света в F_1, отразившись от гиперболы, предстанет стороннему наблюдателю как поток лучей от точечного источника в F_2 и наоборот.

М31◇12*. Эллипс представляет собой ГМТ, сумма расстояний от которых до двух данных точек F_1 и F_2 постоянна и равна σ. Что произойдёт с отражённым от эллипса потоком лучей от точечного источника света в F_1?

М31◇13°. Найдите на эллипсе $4\,x^2+9\,y^2=36$ точку, касательная в которой сотавляет вместе с осями координат треугольник максимально возможной площади.

М31◇14°. Сколько перегибов у графика $y=\dfrac{x+1}{x^2+1}$? Лежат ли они на одной прямой?

М31◇15°. Постройте (с полным исследованием[1]) графики:
а) $y=x\operatorname{arctg} x$ **б)** $y=\dfrac{1-2\,x+4\,x^2}{1-2\,x+2\,x^2}$ **в)** $y=\dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$ **г)** $y=\sqrt[3]{\dfrac{x^2}{x+1}}$ **д)** $y=\dfrac{\cos x}{\cos 2x}$

М31◇16°. Под каким углом пересекаются кривые: **а)** $y=x^2$ и $x=y^2$ **б)** $y=\sin x$ и $y=\cos x$

М31◇17. Точка движется по координатной плоскости по закону $x=x(t)$, $y=y(t)$. Вектор $v(t)=\left(\dfrac{dx}{dt}(t),\dfrac{dy}{dt}(t)\right)$ называется *скоростью* точки. Докажите, что если $v(t)$ существует и непрерывен по t в окрестности t_0 и $\dfrac{dx}{dt}(t_0)\neq 0$, то $\exists$ окрестность t_0, где траектория является графиком дифференцируемой функции $y=f(x)$. Выразите $\dfrac{df}{dx}(t)$ через компоненты $v(t)$.

[1] т. е. как можно более точным указанием области определения, множества значений, промежутков возрастания - убывания, локальных экстремумов, направлений выпуклости, перегибов и асимптот