# Дополнительные задачи про производные

**M$31\frac{1}{2}\diamond$1.** Всегда ли между двумя вещественными корнями многочлена $f \in \mathbb{R}[x]$ лежит вещественный корень многочлена $f'$ ?

**M$31\frac{1}{2}\diamond$2$^*$ (теорема Декарта).** Обозначим через $N(f)$ число положительных корней многочлена $f\in\mathbb{R}[x]$, а через $L(f)$ количество перемен знака в последовательности его коэффициентов. Верно ли, что: **а)** $L$ и $N$ не меняются от умножения $f$ на $\pm x^m$ **б)** $L(f) \equiv N(f) \pmod 2$ **в)** $L(f') \leqslant L(f)$ **г)** $N(f) \leqslant N(f')+1$ **д)** $L(f(x)) + L((-1)^{\deg f} f(-x)) \leqslant \deg f$ **е)** $N(f) \leqslant L(f)$ **ж)** $N(f) = L(f)$, если все корни $f$ в поле $\mathbb{C}$ вещественны.

**M$31\frac{1}{2}\diamond$3.** Сколько вещественных корней у: **а)** $x^3 - 3x^2 - 9x + a$ **б)** $3x^4 - 4x^3 - 6x^2 + 12x - 20$

**M$31\frac{1}{2}\diamond$4 (Правило Лопиталя).** Пусть функции $f$ и $g$ определены и дифференцируемы всюду в некоторой окрестности точки $x_0$ за исключением самой этой точки, и при $x \to x_0$ отношение $f/g$ представляет собой неопределённость вида **а)** $0/0$ **б)** $\infty/\infty$. Докажите, что если $\lim\limits_{x\to x_0}\Big(f'/g'\Big)$ существует и равен $p\in\mathbb{R}$, то $\lim\limits_{x\to x_0}\Big(f/g\Big)$ тоже существует и равен $p$.

**M$31\frac{1}{2}\diamond$5.** Остаётся ли правило Лопиталя в силе, если $x_0$ и/или $p$ равны $\pm\infty$ или $\infty$ ?

**M$31\frac{1}{2}\diamond$6.** Вычислите: **а)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\operatorname{tg} x - 1}{x^2}$ **б)** $\lim\limits_{x\to \pi/4}\dfrac{\sqrt[3]{\operatorname{tg} x} - 1}{2\sin^2 x - 1}$ **в)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 2x - 2\arcsin x}{x^2}$

**M$31\frac{1}{2}\diamond$7 (формула Тейлора - Лагранжа).** Докажите, что $\forall\ f \in \mathscr{C}^k[a,b]$ и $\forall\ x,\, x_0 \in [a,b]$ $f(x) = \dfrac{1}{k!}\,f^{(k)}(\vartheta)\cdot(x-x_0)^k + \sum\limits_{\nu=0}^{k-1}\dfrac{1}{\nu!}\,f^{(\nu)}(x_0)\cdot(x-x_0)^\nu$ для некоторого $\vartheta$ из отрезка с концами в $x_0$ и $x$. (Совет: начните с $k = 1,\,2,\,3,\,\ldots$)

**M$31\frac{1}{2}\diamond$8$^*$.** Заменяя иррациональности подходящими тейлоровскими разложениями (или как-то ещё) вычислите: **а)** $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{3/2}\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}-2\sqrt{x}\right)$ **б)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[6]{x^6+x^5}-\sqrt[6]{x^6-x^5}\right)$ **в)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(\sin x) - x\sqrt[3]{1-x^2}}{x^5}$ **г)** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\sin x}\right)$ **д)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\left(\dfrac{1}{x}-\operatorname{ctg} x\right)$

**M$31\frac{1}{2}\diamond$9.** Пусть функция $f$ бесконечно дифференцируема в $\varepsilon$-окрестности $U$ точки $x_0$, и существует такая константа $c\in\mathbb{R}$, что $|f^{(n)}(x)| < c \ \ \forall x\in U$ и $\forall n\in\mathbb{N}$. Постройте степенной ряд вида $\sum\limits_{k\geqslant 0} a_k(x-x_0)^k \in \mathbb{R}[[(x-x_0)]]$, который $\forall x\in U$ абсолютно сходится к $f(x)$.

**M$31\frac{1}{2}\diamond$10.** Найдите в $\mathbb{Q}[[x]]$ два степенных ряда, которые при каждом $x\in\mathbb{R}$ абсолютно сходятся к $\sin(x)$ и к $\cos(x)$ соответственно.

**M$31\frac{1}{2}\diamond$11.** Рассмотрим ряды $\sin(z)$ и $\cos(z)$ из предыдущей задачи как элементы из $\mathbb{C}[[z]]$, а также ряд $e^z = \sum z^k/k! \in \mathbb{C}[[z]]$. Будут ли все три ряда абсолютно сходиться при любом $z\in\mathbb{C}$? Докажите *формулу Эйлера*: $\forall x,y\in\mathbb{R}\ \ e^{x+iy} = \cos(x) + i\,\sin(y)$ как комплексные числа.

**M$31\frac{1}{2}\diamond$12 (Канторова лесенка).** Существует ли монотонно неубывающая сюрьективная непрерывная функция $f : [\,0\,,\,1\,] \longrightarrow [\,0\,,\,1\,]$, у которой всюду за исключением, разве что, нигде не плотного подмножества меры нуль $f'(x)$ существует и равна нулю.

**M$31\frac{1}{2}\diamond$13$^*$ (Лейбницева пила).** Постройте непрерывную функцию на $[\,0\,,\,1\,]$, не дифференцируюмую ни в одной точке.

**M$31\frac{1}{2}\diamond$14$^*$.** Пусть $f'(x)\in\mathbb{R}$ существует $\forall x\in[a,b]$. Может ли $f'$ быть всюду разрывна на $[a,b]$ ?

**M$31\frac{1}{2}\diamond$15$^*$.** Функция $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ бесконечно дифференцируема и $\forall x\in\mathbb{R}\ \ \exists n\in\mathbb{N}$, такое что $n$-тая производная от $f$ обращается в нуль в точке $x$. Верно ли, что $f$ — многочлен?