Формальные степенные ряды

Определения. Бесконечное выражение $a(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots$, где a_i — числа из некоторого поля $\mathbb{F}$ (у нас $\mathbb{F} = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$), а t — переменная, называется *формальным степенным рядом*. По определению, два ряда *равны*, если равны все их соответственные коэффициенты. Совокупность всех формальных степенных рядов с коэффициентами из $\mathbb{F}$ обозначается $\mathbb{F}[[t]]$. Многочлен — это ряд с конечным числом ненулевых коэффициентов, так что $\mathbb{F}[t] \subset \mathbb{F}[[t]]$. Сопоставление рядам $f_1, f_2, \ldots, f_n$ нового ряда g называется *формальной алгебраической операцией*, если каждый коэффициент g вычисляется конечным числом арифметических действий над конечным числом коэффициентов рядов $f_1, f_2, \ldots, f_n$. Сложение и умножение рядов *являются* формальными операциями, а «вычисление значения ряда при данном числовом значении t» — *нет* (и потому *не определено*).

M28◇1°. Напишите явное выражение для коэффициента при t^n у суммы и у произведения двух рядов через коэффициенты самих этих рядов.

M28◇2°. Для любого конечного множества M положим $C_M(t) \stackrel{\text{def}}{=} \sum\limits_{k\geqslant 0} c_k t^k$, где c_k — это число всех k-элементных подмножеств в M. Для двух непересекающихся конечных множеств A и B выразите $C_{A\cup B}(t)$ и[1] $C_{A\times B}(t)$ через $C_A(t)$ и $C_B(t)$

M28◇3 (деление). Ряд $a(t)$ называется *обратимым*, если существует ряд $a^{-1}(t)$, такой что $a(t)a^{-1}(t) = 1$. Докажите, что $a(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots$ обратим тогда и только тогда, когда $a_0 \neq 0$, причём $a^{-1}(t)$ единственен, и его отыскание есть формальная операция.

M28◇4. Найдите n-тый коэффициент ряда: **а)** $(1-t)^{-1}$ **б)** $\big((1-t)^2\big)^{-1}$ **в)** $\big((1-t)^m\big)^{-1}$ **г)** $\big((t-1)(t+2)(t-3)\big)^{-1}$ **д)** $\big((t+1)^2(t-2)(t+3)^3\big)^{-1}$ **е)** $\big(t^2+t-1\big)^{-1}$ **ж)** $\big(t^2+t+1\big)^{-1}$.

M28◇5° (замена переменного). Является ли формальной алгебраической операцией подстановка вместо t произвольного ряда с нулевым свободным членом?

M28◇6. Подставим $t+\vartheta$ вместо t в ряд $f(t) \in k[[t]]$, сгруппируем результат по степеням ϑ и запишем его в виде $f(t+\vartheta) = \sum\limits_{k\geqslant 0} \dfrac{1}{k!} f^{(k)}(t) \cdot \vartheta^k$. Выразите коэффициенты каждого из рядов $f^{(k)}(t)$ через коэффициенты исходного ряда $f(t)$.

Производная. Ряд $f^{(1)}(t)$ из зад. M28◇6 называется *производной* f и иначе обозначается f' или $\dfrac{d}{dt}f$.

M28◇7. Согласуются ли определения производной для рядов и многочленов, и верно ли, что в зад. M28◇6 $f^{(k)} = \left(f^{(k-1)}\right)' = \dfrac{d^k}{dt^k} f$?

M28◇8. Докажите, что для любого ряда $f(t) \in k[[t]]$ ряд $f(t_1) - f(t_2) \in k[[t_1, t_2]]$ делится в $k[[t_1,t_2]]$ на $(t_1 - t_2)$, и при подстановке в частное $t_1 = t_2 = t$ получится ряд $f'(t)$.

M28◇9. Пусть $f(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots$ и $g(t) = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \cdots$. Выразите через f, g, f' и g' производные: **а)** $(f \pm g)'$ **б)** $\big(\alpha f(t)\big)'$, где $\alpha = \text{const}$ **в)** $\big(t^m f(t)\big)'$ **г)** $(f\cdot g)'$ **д)** $\left(\dfrac{f}{g}\right)'$, при $b_0 \neq 0$ **е)** $\big(f(\alpha t)\big)'$, где $\alpha = \text{const}$ **ж)** $\big(f(t^m)\big)'$ **з)** $\Big(f\big(g(t)\big)\Big)'$, при $b_0 = 0$.

M28◇10. Вычислите m-тую производную от $(1-t)^{-1}$ и сопоставьте это с зад. M28◇4.

M28◇11. Разложите в формальный степенной ряд $(1-t)^{-m}$ с произвольным $m \in \mathbb{N}$.

M28◇12. Сформулируйте и докажите для рядов правило Лейбница и формулу Тейлора из зад. M27◇14?

---

[1] *произведение* $A\times B$ множеств A и B представляет собой множество всех пар (a,b) с $a\in A$, $b\in B$