Действие $\mathbb{Q}[[d/dx]]$ на $\mathbb{Q}[x]$.

Разностные операторы на кольце многочленов. Для любого формального ряда $F(t) = \sum a_k t^k \in \mathbb{Q}[[t]]$ определим отображение $\widetilde{F} \overset{\text{def}}{=} F(d/dx) : \mathbb{Q}[x] \longrightarrow \mathbb{Q}[x]$, которое сопоставляет многочлену $g \in \mathbb{Q}[x]$ многочлен $\widetilde{F}g \overset{\text{def}}{=} \sum a_k (d/dx)^k g$, где $(d/dx)^k g = g^{(k)}$ — это k-я производная от g. Поскольку $\forall\, g \in \mathbb{Q}[x]\ \exists\, n \in \mathbb{N} : g^{(n)} = 0$, сумма справа конечна $\forall g$, и $\widetilde{F}g$ действительно является многочленом. Отображения такого вида называются *разностными операторами* на кольце многочленов.

M$28\frac{3}{4}\diamond 1^{\circ}$ (аппелевы многочлены). Проверьте, что разностные операторы *линейны*,т. е. что $\widetilde{F}(\lambda f + \mu g) = \lambda \widetilde{F} g + \mu \widetilde{F} f\ \forall\, f, g \in \mathbb{Q}[x]$ и $\forall\, \lambda, \mu \in \mathbb{Q}$, и что действие $\widetilde{F}$ вполне определяется заданием последовательности многочленов $F_n(x) \overset{\text{def}}{=} \widetilde{F} x^n$. Выразите коэффициенты $F_n(x)$ через коэффициеты $F(t)$ и, наоборот, восстановите F по F_n.

M$28\frac{3}{4}\diamond 2^{\circ}$. Пусть $F(t)G(t) = 1$ в $\mathbb{Q}[[t]]$. Что можно сказать про отображения $\widetilde{F}$ и $\widetilde{G}$?

M$28\frac{3}{4}\diamond 3$ (формула Тейлора). Как действуют на $\mathbb{Q}[x]$ операторы $\exp(d/dt)$ и $\exp(-d/dt)$?

M$28\frac{3}{4}\diamond 4$. Являются ли отображения $f(x) \xmapsto{\nabla} f(x) - f(x-1)$ и $f(x) \xmapsto{\Delta} f(x+1) - f(x)$ разностными операторами, и если да, то каким рядам они отвечают?

M$28\frac{3}{4}\diamond 5$. Постройте последовательность многочленов $c_n(x)$, в которой $c_0(x) = 1$, при $n \geqslant 1$ все $c_n(x)$ не имеют свободного члена и удовлетворяют соотношению $\nabla c_n = c_{n-1}$.

M$28\frac{3}{4}\diamond 6$ (целозначные многочлены). Многочлен $f(x)$ с рациональными коэффициентами называется *целозначным*, если значение $f(z) \in \mathbb{Z}\ \forall\, z \in \mathbb{Z}$. Бывают ли целозначные многочлены с нецелыми коэффициентами? Укажите какой-нибудь набор из $(n+1)$ целозначных многочленов $f_0, f_1, \ldots, f_n$, такой что любой целозначный многочлен f степени $\leqslant n$ единственным образом записывается в виде $f = m_0 f_0 + m_1 f_1 + \cdots + m_n f_n$ с $m_i \in \mathbb{Z}$. Существуют ли такие наборы с $\deg f_i = i\ \forall i$ и с $\deg f_i = n\ \forall i$?

M$28\frac{3}{4}\diamond 7^{*}$. Проверьте, что операторы Δ и ∇ из зад. M$28\frac{3}{4}\diamond 4$ строго понижают степени многочленов, и потому для каждого ряда $F \in \mathbb{Q}[[t]]$ определены отображения $F^{\Delta} \overset{\text{def}}{=} F(\Delta) : \mathbb{Q}[x] \longrightarrow \mathbb{Q}[x]$ и $F^{\nabla} \overset{\text{def}}{=} F(\nabla) : \mathbb{Q}[x] \longrightarrow \mathbb{Q}[x]$. Докажите, что множества операторов $\mathbb{Q}[[\Delta]]$, $\mathbb{Q}[[\nabla]]$ и $\mathbb{Q}[[d/dx]]$ совпадают. Разверните d/dx в формальные степенные ряды от Δ и от ∇.

M$28\frac{3}{4}\diamond 8$ (суммирование степеней). Пусть многочлен $s_m(x)$ таков, что $1^m + 2^m + \cdots + (n-1)^m = s_m(n)\ \forall\, n \in \mathbb{N}$. Вычислите $\Delta s_m(x)$ и найдите в $\mathbb{Q}[[t]]$ функцию, для которой $s'_m(x)$ является аппелевым многочленом (см. зад. M$28\frac{3}{4}\diamond 1$).

Ряд Тодда и числа и многочлены Бернулли. $B(t) \overset{\text{def}}{=} \dfrac{t}{\exp(t) - 1} = \sum\limits_{k \geqslant 0} \dfrac{b_k}{k!} t^k$ называется *рядом Тодда*.

Входящие в его коэффициенты числа b_k называются *числами Бернулли*, а его аппелевы многочлены $B_n(x) = \widetilde{B} x^n$ называются *многочленами Бернулли*.

M$28\frac{3}{4}\diamond 9$. Выразите **а)** b_n через $b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}$ **б)** B_n через $B_0, B_1, \ldots, B_{n-1}$

M$28\frac{3}{4}\diamond 10$. Выразите коэффициенты многочлена $s_m(x)$ из зад. M$28\frac{3}{4}\diamond 8$ через числа Бернулли.

M$28\frac{3}{4}\diamond 11$. Найдите «нечётную составляющую» $B(t) - B(-t)$ и все числа b_{2k+1}.

M$28\frac{3}{4}\diamond 12$. Вычислите первые 11 чисел и многочленов Бернулли и сумму 10-х степеней первых 1000 натуральных чисел[1].

[1] у Якоба Бернулли, по его собственному признанию, на это ушло «меньше половины четверти часа»