Многочлены.

Обозначения. Всюду в этом листке через k обозначается любое из *полей* $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, а через $k[x]$ — *кольцо* многочленов от переменной x с коэффициентами в поле k. Многочлен f называется *неприводимым*, если $f \neq gh$ с $\deg g, \deg h < \deg f$. Многочлен со старшим коэффициентом 1 называется *приведённым*. Если $f(x) = (x-\alpha)^m g(x)$ и $g(\alpha) \neq 0$, то α называется *m-кратным корнем* f.

М27◇1°. Может ли неприводимый многочлен из $\mathbb{Q}[x]$ быть приводимым в $\mathbb{R}[x]$ или $\mathbb{C}[x]$?

М27◇2°. Докажите, что для любых двух многочленов $f, g \in k[x]$ существуют единственные многочлены $q, r \in k[x]$, такие что $f = g \cdot q + r$ и либо $\deg r < \deg g$ либо $r = 0$.

М27◇3°. Докажите, что для любого набора многочленов $f_1, f_2, \ldots, f_n$ существует единственный приведённый многочлен $\text{НОД}(f_1, f_2, \ldots, f_n)$, который делит все f_i и делится на любой другой общий делитель всех f_i. Сформулируйте и докажите аналогичное о $\text{НОК}(f_1, f_2, \ldots, f_n)$, а также, что $\text{НОД}(f_1, f_2, \ldots, f_n) = g_1 f_1 + g_2 f_2 + \cdots + g_n f_n$ с подходящими $g_i \in k[x]$.

М27◇4°. Сформулируйте и докажите алгоритм Евклида для отыскания $\text{НОД}(f, g)$ и спробуйте его, представив $\text{НОД}(\,x^5-1\,, x^4+x^2+1\,)$ в виде $f(x)(x^5-1) + g(x)(x^4+x^2+1)$.

М27◇5°. Пусть $\text{НОД}(f, g) = 1$. Верно ли, что f делит gh только когда f делит h, и что если h делится на f и на g, то h делится и на fg?

М27◇6. Найдите все $f \in \mathbb{Q}[x]$ с остатком $1+x$, $1+x^3$, $1+x^5$ от деления на $1+x^2$, $1+x^4$, $1+x^8$.

М27◇7. Найдите остаток от деления x^{2000} на: **а)** $(x-\alpha)$, где $\alpha \in k$ **б)** x^2+x+1 **в)** x^2+x-1

М27◇8. Пусть $f, g \in \mathbb{Q}[x]$ неприводимы и $\deg f \neq \deg g$. Могут ли они иметь общий корень в $\mathbb{C}$?

М27◇9. Могут ли два различных многочлена степеней, меньших n, принимать одинаковые значения в n точках? Сколько корней может быть у многочлена степени n?

М27◇10. Пусть числа $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in k$ попарно различны. Напишите многочлен $f(x)$ степени n с корнями $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, равный 1 при $x = \alpha_0$. Много ли таких многочленов?

М27◇11. Подставим в многочлен $f \in k[x]$ вместо x сумму $x+t$, раскроем все скобки и сгруппируем результат по степеням t следующим образом: $f(x+t) = f^{(0)}(x) + f^{(1)}(x) \cdot t + g(x,t) \cdot t^2$. Выразите коэффициенты $f^{(0)}(x)$ и $f^{(1)}(x)$ через коэффициенты $f(x)$.

Производная. Многочлен $f^{(1)}$ из зад. М27◇11 называется *производной* от f и по-другому обозначается $f'(x)$ или $\frac{d}{dx}f$. Положим, далее, $f^{(2)} = f'' \overset{\text{def}}{=} (f')' = \frac{d^2}{dx^2}f$, и вообще, $f^{(k)} \overset{\text{def}}{=} \left(f^{(k-1)}\right)' = \frac{d^k}{dx^k}f$.

М27◇12. Обозначим через $\Delta_f(t_1, t_2)$ тангенс угла наклона прямой, пересекающей график многочлена f в точках с абсциссами t_1 и t_2, выраженный в виде *многочлена* от t_1, t_2. Докажите, что такое выражение действительно имеется и что $\Delta_f(x,x) = f'(x)$.

М27◇13. Выразите через $f(x)$, $g(x)$, $f'(x)$ и $g'(x)$ производные: **а)** $(f \pm g)'$; **б)** $(\alpha g)'$, $\alpha \in k$; **в)** $(x^m f)'$; **г)** $(f \cdot g)'$; **д)** $\left(f/g\right)'$, если $f/g \in k[x]$; **е)** $(f^m)'$; **ж)** $(f(x^m))'$; **з)** $(f(g(x)))'$.

М27◇14 (правило Лейбница и формула Тейлора). Докажите тождества:

а) $(fg)^{(k)} = \sum\limits_{i=0}^{k} \binom{k}{i} f^{(i)} g^{(k-i)}$ **б)** $f(x+y) = \sum\limits_{m=0}^{\deg f} \frac{1}{m!} f^{(m)}(x)\, y^m$?

М27◇15. Будет ли m-кратный корень f корнем f', и если да, то какой кратности?

М27◇16. Найдите все (комплексные) кратные корни $x^7 + 7x^5 - 36x^4 + 15x^3 - 216x^2 + 9x - 324$.

М27◇17. Может ли неприводимый многочлен $f \in \mathbb{Q}[x]$ иметь кратный комплексный корень?

М27◇18 (формулы Виета). Каков коэффициент при x^k у $f(x) = a_0\,(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\,\cdots\,(x-\alpha_n)$?

М27◇19. Можно ли линейной заменой переменного в $a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$ уничтожить **а)** член с x^{n-1} **б)** два члена с x^{n-1} и с x^{n-2}?

М27◇20 (дискриминант). В зад. М27◇18 число $D_f \overset{\text{def}}{=} a_0^{2n-2} \prod\limits_{i<j} (\alpha_i - \alpha_j)^2$ называется *дискриминантом* f. Выразите дискриминанты **а)** $x^2 + px + q$ **б*)** $x^3 + px + q$ через p и q.